AFIF BEN ISMAIL

SERIE D'EXERCICES

$4^{ème}$ SCE § TEC

(*FONCTION RECIPROQUE-ETUDE DE FONCTIONS*)

EXRCICE N°1 :

Soit h la fonction définie sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ par h(x) $=\cos^2(x)$.

1) Montrer que h réalise une bijection de $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle J que l'on déterminera.
2) Etudier la dérivabilité de h^{-1} à droite en 0.
3) Montrer que h^{-1} est dérivable sur $]0;1[$ et que h'(x) $=\frac{-1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$.
4) Ecrire une équation de la tangente à C_{h-1} au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.
5) Dresser le tableau de variation de h^{-1}.

EXRCICE N°2 :

On considère la fonction f définie sur $\left[-\frac{\pi}{4}\;;+\infty\right[$ par f(x)= $\begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} & si\ x \succ 0 \\ \frac{1}{2}tg(x+\frac{\pi}{4}) & si\ -\frac{\pi}{4}\le x\le 0 \end{cases}$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f.
2) Soit g la restriction de f à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{4}\;;0\right]$.

   a) Montrer que g est une bijection de $\left[-\frac{\pi}{4}\;;0\right]$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

   b) Déterminer le domaine de dérivabilité de g^{-1} puis expliciter $(g^{-1})'(x)$.
3) a) Montrer que l'équation *g(x)+x=0* admet une solution unique $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{4}\;,0\right[$.

   b) En déduire que le point I $(-\alpha;\alpha)\in C\cap D$ où C est la courbe représentative de g^{-1} et *D : y = -x*.

EXRCICE N°3 :

I) Soit la fonction f définie sur $]-\infty\;;1]$ par f(x)= $x-2+4\sqrt{1-x}$.

1) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1.Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
2) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty\;,1[$ et calculer f '(x).
3) Résoudre l'équation $\sqrt{1-x}-2=0$ puis dresser le tableau de variation de f.

II) Soit g la fonction définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ par g(x) = $f(\cos^2 x)$.

1) Vérifier que pour tout x∈ $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, g(x) $=-(\sin x-2)^2+3$.
2) Montrer que g réalise une bijection de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle J à déterminer.
3) Dresser le tableau de variation de g^{-1} : fonction réciproque de g.
4) Montrer que g-1 est dérivable en -1 et calculer $(g^{-1})'(-1)$.
5) Montrer que l'équation g(x) = -x admet une seule solution $\alpha\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

EXRCICE N°4 :

Soit la fonction f définie sur $[1;+\infty[$ par f(x) = $x+\sqrt{x^2-x}$.

1) a) Montrer que f est dérivable sur $]1\,;+\infty[$ et calculer sa fonction dérivée.

   b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

   c) Dresser le tableau de variation de f.

2) Montrer que l'équation $f(x)=3-x^2$ admet une seule solution α dans $[1;+\infty[$.Prouver que $\alpha\in\,]1;2[$.

3) a) Montrer que f est une bijection de $[1;+\infty[$ sur un intervalle J à déterminer.

   On note g sa fonction réciproque.

   b) Calculer f(2).En déduire que g est dérivable en $2+\sqrt{2}$ et calculer g ' ($2+\sqrt{2}$).

4) Expliciter g(x) pour x $\in$ J.

EXRCICE N°5 :

Soit la fonction f définie par : $f(x)=x^3+x-1$

1) Dresser le tableau de variation de f.
2) Montrer que l'équation f(x)=0 admet une solution unique a dans [0 ,1].
3) En déduire le signe de f(x).
4) Soit la fonction g définie par : g(x) = x^4+2x^2+4x+1.

   a) Vérifier que g′(x)= - 4f (-x) et g'(a)=8.

   b) Dresser, alors, le tableau de variation de g.

EERCICE N°6 :

A) Soit f la fonction définie par : $f(x)=\sqrt{x^2+x}$ et(C $_f$) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(0,\vec{i},\vec{j})$.

1) Vérifier que f est définie sur D = $]-\infty\,;-1]\cup[0\,,+\infty[$.
2) Montrer que la droite $\Delta: x=-\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de (C $_f$).
3) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur $[0;+\infty[$.
4) Dresser le tableau de variation de f sur $[0;+\infty[$.
5) Montrer que la droite $\Delta': y=x+\frac{1}{2}$ est une asymptote à (C $_f$) au voisinage de $+\infty$.
6) Tracer la courbe(C $_f$).Construire les demi-tangentes à(C $_f$) en O et A (-1,0).

B) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[0;+\infty[$.

1) Montrer que g réalise une bijection de $[0;+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.
2) Etudier la continuité et la dérivabilité de g^{-1} sur J.
3) Calculer g (1) et en déduire $(g^{-1})'(\sqrt{2})$.

EERCICE N°7 :

A) Soit f la fonction définie par : f(x)= $\begin{cases} x^2-x\sqrt{x} & si\ x\geq 0 \\ \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} & si\ x\prec 0 \end{cases}$

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
3) Montrer que pour tout x < 0 ; $f'(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$ et que f '(x) > 0 pour tout x < 0.
4) Dresser le tableau de variation de f.
5) Tracer la courbe représentative (C $_f$) de f dans un repère orthonormé $(0,\vec{i},\vec{j})$.

B) Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty\,;0[$.

1) Montrer que g réalise une bijection de $]-\infty\,;0[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.
2) Etudier la continuité et la dérivabilité de g^{-1} sur J.
3) Calculer g $(-\frac{4}{3})$. En déduire $(g^{-1})'(-\frac{1}{2})$.
4) Tracer la courbe représentative (C') de g^{-1} dans le même repère $(0,\vec{i},\vec{j})$.