Exercice n 1 :

Déterminer dans chacune des cas suivants, les dérivées successives de la fonction f.

1) $f(x) = x^5 + 2x^3 - x^2 + 6x + 1$ sur $\mathbb{R}$
2) $f(x) = (3x+1)^2$ sur $\mathbb{R}$
3) $f(x) = \sin(3x - \frac{\pi}{6})$ sur $\mathbb{R}$
4) $f(x) = \dfrac{3x+1}{x+2}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$

Exercice n 2 :

Déterminer toutes les fonctions polynômes P vérifiant :
$(P'(x))^2 = P(x)$; $x \in \mathbb{R}$

Exercice n 3 :

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{x \cos x + \pi}{x - \pi}$
2) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 + 3x^2 - 4}{x - 1}$
3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(\sin x)}{x}$ ou f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$

Exercice n 4 :

Vérifier dans chacun des cas suivants, que la fonction f est dérivable sur l'intervalle I et déterminer sa fonction dérivée

1) $f(x) = \sqrt{2 - \cos x}$ $\quad I = \mathbb{R}$
2) $f(x) = \sin(\cos x)$ $\quad I = \mathbb{R}$
3) $f(x) = \mathrm{tg}(\cos^2 x)$ $\quad I = \mathbb{R}$

Exercice n 5 :

Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$; $x \in \mathbb{R}$

1) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $(1 + x^2) f'(x) = x f(x)$
2) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a :
   $(1 + x^2) f^{(n+2)}(x) + (2n + 1) x f^{(n+1)}(x) + (n^2 - 1) f^{(n)}(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$
3) En déduire que les dérivées d'ordre impair sont nulles en 0

Exercice n 6 :

Soit $f(x) = (1 + x)^n$ $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$

1) Calculer de deux façons différentes $f'(x)$
2) En déduire la sommes $S_1 = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots\ldots + n C_n^n$
3) Calculer de même $S_2 = 2C_n^2 + 6C_n^3 + \ldots\ldots + n(n-1) C_n^n$ $\quad n \geqslant 2$
4) En déduire $S_1 = 2^2 C_n^2 + 3^2 C_n^3 + \ldots\ldots + n^2 C_n^n$

Exercice n 7 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\sqrt{3} - 2\sin x$

1) Calculer $f'(x)$
2) Soit $\varphi(x) = f(x) - f(c) - (x - c)$ ou $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ et $c \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$

   Déterminer le signe de f (x).

Exercice n 8 :

Soit $\alpha \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et $\varphi_\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \longmapsto 1 + \cos\alpha \sin x$

1) Montrer à l'aide du théorème des accroissements finis que

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \left|\varphi_\alpha(x) - \varphi_\alpha(y)\right| \leqslant \cos\alpha \left|x - y\right|$

2) Montrer que l'équation $\varphi_\alpha(x) = x$ possède une unique solution $x_0 \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

3) Soit (U_n) $n \in \mathbb{R}$ la suite réelle définie par la donnée de U_0 et par $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} = \varphi_\alpha(U_n)$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\left|U_n - x_0\right| \leqslant \cos^n \alpha \left|U_0 - x_0\right|$

b) En déduire que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente

Exercice n 9 :

Soit $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \dfrac{x}{1 + x + x^2}$

1) Etudier g et construire Cg dans un R.O.N $(O, \vec{i}, \vec{j})$

2) Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $g(x) \leqslant x$, résoudre $g(x) = x$.

3) Soit $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = g(U_n)$ $n \in \mathbb{N}$

a) que la suite U est décroissante

b) Montrer que U est convergent et calculer sa limite

c) Montrer Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant \dfrac{1}{n+1}$

d) Montrer que g est croissante sur $[0,1]$

e) En déduire que $\forall n \geqslant 1$ on a $U_{n-1} \leqslant \dfrac{1}{n}$

f) Exprimer $\dfrac{1}{U_{n+1}} - \dfrac{1}{U_n}$ en fonction de U_n

Etablir que $1 \leqslant \dfrac{1}{U_{n+1}} - \dfrac{1}{U_n} \leqslant 1 + \dfrac{1}{n+1}$

g)En déduire que $n \leqslant \dfrac{1}{U_n - 1} \leqslant n + 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}$

h) Retrouver la limite de U.

Exercice n 10 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1\right)$

1) Etudier les variations de f et construire Cf dans un R.O.N $(O, \vec{i}, \vec{j})$

2) Montrer que $f(x) = x$ admet une unique solution x_0 dans $\mathbb{R}$ et $-1 < x_0 < \dfrac{-1}{2}$.

3) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ $\left|f'(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$

4) Soit U la suite définie par :

$U_0 = -1$; $U_{n+1} = f(U_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

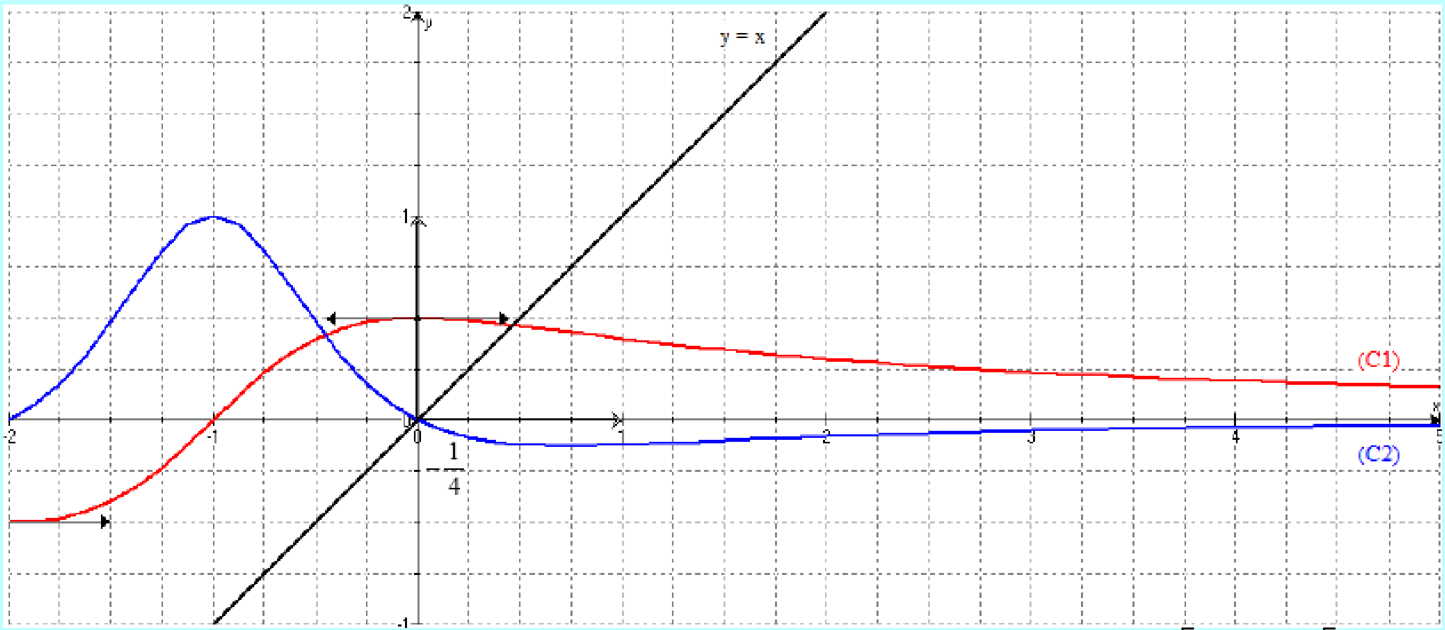
a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ $-1 \leqslant U_n \leqslant \dfrac{1}{2}$

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$; $\left|U_{n+1} - x_0\right| \leqslant \dfrac{1}{2}\left|U_n - x_0\right|$

c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$; $\left|U_n - x_0\right| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \left|U_0 - x_0\right|$

d) En déduire que la suite U converge vers x_0.

Exercice n 11 :(**Proposé par : Mr KAHIA ; Lycée Hannibal Tébourba**)



Dans la figure ci-dessus on a représenté deux courbes (C1) et (C2) définis et continues sur $\left[-2\ ,\ +\infty\right[$.

Ayant toute les deux la droite d'équation y = 0 comme asymptote.

Les deux courbes sont celles d'une fonction f et de sa dérivée f ' .

I- Lecture graphique :

En utilisant le graphique répondre à chacune des questions suivantes :

1) Justifier que (C1) est la courbe représentative de f .

2) a- Déterminer chacune des limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \quad ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{2\,f(x) - 1}{2x} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to (-2)^+} \frac{4 + 2x}{1 + 2f(x)}$$

b- Dresser le tableau de variation de f .

3) a- Prouver que l'équation f(x)=x admet sur $\left[0,1\right]$ une solution unique α .

b- Montrer que pour tout réels a et b appartenant à l'intervalle $\left[0,1\right]$ on a : $\left|f(b) - f(a)\right| \leqslant \frac{1}{4}\left|b - a\right|$.

II- Etude d'une suite :

On considère la suite (Un), définie sur ℕ, par : $\begin{cases} u_0 \in \left[0,1\right] \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1) Montrer que, pour tout n ∈ ℕ , $0 \leqslant u_n \leqslant 1$

2) Prouver que, pour tout n ∈ ℕ , $\left|u_n - \alpha\right| \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n$. Déterminer alors la limite de U.

3) On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$

a- Montrer que, pour tout n ∈ℕ on a : $n\alpha - \frac{4}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) \leqslant S_n \leqslant n\alpha + \frac{4}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$

b- Déduire : $\lim_{n \to \infty} S_n$ puis $\lim_{n \to \infty} \frac{S_n}{n}$

Exercice n 12 :

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} f(0)=0 \\ \text{pour tout } x \in \text{IR} : f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2} \end{cases}$

I- 1) Soit $F : x \longmapsto f(x) + f(-x)$

a) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer F' (x)

b) En déduire que f est une fonction impaire

2) a) En utilisant le théorème des inégalités des accroissements finis, montrer que $f(1) \leqslant 1$

b) Soit la fonction K définie sur $[1,+\infty[$ par $k(x) = f(x) + \dfrac{1}{x}$

* Donner le sens de variations de k

* En déduire que f est majorée sur $[1,+\infty[$, puis qu'elle admet une limite finie ℓ en $+\infty$

II- Soit la fonction g définie sur $[1,+\infty[$ par $g(x) = f(x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

1) a) Calculer g '(x) pour tout $x \in [1,+\infty[$

b) En déduire que $\ell = 2\,f(1)$

2) Soit h la fonction définie sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $h(x) = \tan(x)$

a) Montrer que $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f \circ h(x) = 1$

b) Montrer que pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$; on a $f \circ h(x) = x$

c) En déduire la valeur de ℓ puis celle de f (1)

3) Tracer la courbe Cf de f sur un repère orthonormé

III- 1) Montrer que l'équation $f(x) = 2x - 1$ admet dans $]0,2[$ une unique solution a.

2) Soit (U) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0 = 0 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N} : U_{n+1} = f\left(\dfrac{1}{2}U_n\right) + 1 \end{cases}$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $0 \leqslant U_n \leqslant 2$

b) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$: $|U_{n+1} - 2a| \leqslant \dfrac{1}{2}|U_n - 2a|$

c) En déduire que la suite (U) est convergente et déterminer sa limite.