EXERCICE N°1

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Soit f la fonction définie sur R par : $f(x)=(x^3-1)\sqrt{x^2+1}$

1°)Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2°)Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f et en déduire que le signe de f'(x) et le même que celui de $P(x) = 4x^4 + 3x^2 - x$.

3°)Soit $Q(x) = 4x^3 + 3x - 1$, *étudier les variations de Q sur R et démontrer que l'équation Q(x) = 0 admet une unique solution* α *sur R dont on donnera une valeur approchée à 10*

4°)En déduire le signe de Q(x) puis le signe de f'(x).

5°)Dresser le tableau de variation de f sur R.

6°) Tracer la courbe (ζf) *de la fonction f .*

EXERCICE N°2

Partie A

Soit P la fonction polynôme définie sur R par : $P(x) = x^3 - 3x + 4$.

1°) Etudier les variations de P.

2°) Démontrer que l'équation P(x) = 0 admet une unique solution dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} *près.*

3°) En déduire le signe de P(x) suivant les valeurs de x.

Partie B

Soit f la fonction définie sur R^* *par :* $f(x)=x+2+\dfrac{3x-2}{x^2}$ *et C sa courbe représentative dans un repère orthonormal* $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. *(unité 1 cm)*

1°) Démontrer que la courbe C_f *admet deux asymptotes que l'on précisera.*
Préciser la position de C_f *par rapport à la droite* Δ *d'équation* $y = x + 2$.

2°) Démontrer que $f'(x)=\dfrac{P(x)}{x^3}$ *et en déduire le sens de variation de f.*

3°) Déterminer le ou les points où la tangente à la courbe C_f *est parallèle à la droite* Δ.

4°) Tracer la courbe C_f *, la droite* Δ *et les autres renseignements obtenus sur* C_f *,.*

EXERCICE N°3

Partie I.

Soit la fonction f définie sur $R-\{2\}$ *par :* $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x-2}$ *où a , b et c sont des réels.*

On désigne par (ζf) *la courbe représentative de f dans un repère orthonormé* $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Déterminer les réels a , b et c pour que:

- *La courbe* (ζf) *passe par le point A(0,-1)*
- *La fonction f admet un extremum en 0*
- *La courbe* (ζf) *admet au point d'abscisse 1 une tangente de coefficient directeur (-3)*

Partie II.

On donne a = 1 , b = -1 et c = 2.

1°)Dresser le tableau de variations de la fonction f .

2°)Préciser les extremum de f .

3°)En utilisant les variations de f comparer les nombres : $A=\dfrac{2008\times 2007+2}{2006}$ *et* $B=\dfrac{2009\times 2008+2}{2007}$

EXERCICE N°4

Soit f une fonction vérifiant

1. *f définie et continue sur R*
2. $\lim\limits_{+\infty} f = 1$
3. $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=+\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=0$

4. $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x)=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x)=0$
5. Pour tout $x\in]-\infty,1]$: $f(x)>x$
6. Pour tout $x\in]-\infty,1[$: $f'(x)>0$
7. Pour tout $x\in]1,+\infty[$: $f'(x)<0$
8. $f(1)=3$

*1°)Interpréter géométriquement les points: **2** , **3** , et **4** .*
2°)Dresser le tableau de variations de f .
3°)Tracer l'allure de (ζf) où (ζf) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan.

EXERCICE N°5

Partie A

Soit g la fonction définie sur R par : $g(x) = x^4 - 4x - 3$
1°) Etudier les variations de g.
2°) a) Démontrer que l'équation g(x) = 0 admet deux solutions α et β sur R telles que : $\alpha < 0 < \beta$.
b) Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α et de β.
c) Déterminer le signe de g(x) en fonction de x.

Partie B

Soit f la fonction définie sur R \ {1} par : $f(x)=\dfrac{x^4+1}{x^3-1}$
1°) Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2°) a) Déterminer les réels a, b, c, d et e tels que pour tout x≠1 : $f(x)=ax+b+\dfrac{cx^2+dx+e}{x^3-1}$
b) En déduire que la courbe C_f représentative de f admet une asymptote oblique que l'on indiquera.
c) Préciser la position de C_f par rapport à la droite d'équation $y = x$.
3°) a) Démontrer que $f'(x)=\dfrac{x^2g(x)}{(x^3-1)^2}$
b) En déduire les variations de f.
4°) En utilisant les encadrements de la partie A, déterminer un encadrement de $f(\alpha)$ et de $f(\beta)$.
5°) Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse -1.
6°) Dresser le tableau de variation complet de f et tracer C_f dans un repère orthonormal (unité graphique : 2 cm)

EXERCICE N°6

Soit la fonction f définie sur $[2,+\infty[$ par $f(x)=2x+\sqrt{x^2-4}$. On désigne par (ζf) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

1°)a)Déterminer $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{f(x)-4}{x-2}$ et interpréter géométriquement le résultat.
b)Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$
c)Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-3x)$. Interpréter géométriquement le résultat.
2°)Montrer que f est dérivable sur $]2,+\infty[$ et calculer f '(x) pour tout $x\in]2,+\infty[$.
3°) Tracer la courbe (ζf) de la fonction f .
4°)Montrer que f est une bijection de $[2,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera. On note f^{-1} sa fonction réciproque.
5°)a)Sur quelle intervalle K , f^{-1} est continue
b)Etudier les variations de f^{-1}
6°)Construire la courbe (ζf^{-1}) de la fonction f^{-1} dans le même repère.
7°)Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$

EXERCICE N°7

Soit f la fonction définie sur $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ par : $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}+\dfrac{x}{8}+1$

Partie A

1°)Montrer que f' est définie sur $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ par : $f'(x)=\dfrac{\left(\sqrt{2x+1}\right)^3-8}{8\left(\sqrt{2x+1}\right)^3}$

2°) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation complet.

3°) Soit (C) la courbe représentative de f.

a) Démontrer que (C) admet deux asymptotes dont l'une est la droite (D) d'équation : $y = \frac{x}{8} + 1$.

Préciser la position relative de (C) et de (D).

b) Construire (C) dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$, unité graphique : 4 cm.

4°) Calculer, en cm², l'aire du domaine plan délimité par (C), (D) et les droites d'équation x = 1 et x = 2.

Parie B

1°) Soit g la fonction définie sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ par : $g(x) = f(x) - x$.

Démontrer que l'équation g(x) = 0 admet une unique solution α et que $\alpha \in [1 ; 2]$.

2°) Démontrer que, pour tout $x \in [1 ; 2]$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{10}$

3°) Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n), \quad \text{pour tout } n \in N \end{cases}$

a) Démontrer que pour tout $x \in [1 ; 2]$,on a : $f(x) \in [1 ; 2]$.

b) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in N$, $1 \leq u_n \leq 2$.

c) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontrer que : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{10}|u_n - \alpha|$

d)En déduire que pour tout n de N : $|u_n - \alpha| \leq \frac{2}{10^n}$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

d) Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

EXERCICE N°8

On considère la fonction f définie sur $[-1,1] - \{0\}$ par : $f(x) = 1 + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

On note par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé R .

1°)Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ et interpréter les résultats obtenus

2°)Etudier la dérivabilité de f en point d'abscisse x=1 et interpréter le résultat obtenu.

3°) Etudier la dérivabilité de f en point d'abscisse x=-1 et interpréter le résultat obtenu.

4°)Montrer que : $\forall x \in]-1,1[- \{0\}$: $f'(x) = \frac{-1}{x^2\sqrt{1-x^2}}$

5°)Dresser le tableau de variation de la fonction f .

6°)Montrer que f réalise une bijection de $]0,1[$ sur un intervalle J que l'on précisera .

7°)Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout x de J .

8°) Représenter dans le même repère R la courbe C et C' de f^{-1} .

EXERCICE N°9

On considère la fonction f définie sur R par : $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

On note par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé R .

Partir A

1°)Dresser le tableau de variation de la fonction f .

2°)Vérifier que I(0 , 1) est un centre de symétrie pour C .

3°)Montrer que l'équation : f(x) = x admet une unique solution α dans R et vérifier que : $1 < \alpha < 2$

4°)Ecrire l'équation de la tangente T à C au point I .

5°)Etudier la position relative de T et C .

6°)Montrer que f réalise une bijection de IR sur un intevalle J que l'on précisera .

7°)Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout x de J .

8°)Représenter dans le même repère R la courbe C' de f^{-1} .

Partie B

On considère la fonction g définie sur R par : $g(x) = 1 + \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$

On note par C_1 *sa courbe représentative dans un repère orthonormé R .*

1°)Etudier la parité de g .

2°)Etudier les variations de g sur $[0,+\infty[$.

3°)Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)-x-1\right)$ *. Que peut-on conclure ?*

4°)Construire C_1 *dans un autre repère R' .*

Partie C

On considère la fonction f_n *définie sur R par :* $f_n(x) = 1 + \dfrac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}$ *où* $n \in N^*$

et $f_0(x) = f(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

1°)Etudier les variations de f_n *pour tout n de* N^*

2°)Etudier suivant n , les limites suivant : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_n(x)}{x}$

Interpréter les résultats obtenus

3°)Montrer que les courbes (C_k) *passent par deux points fixes*

EXERCICE N°10

Soit la fonction f définie sur $[1,+\infty[$ *par :* $f(x) = x + \sqrt{x^2-1}$

1°)Montrer que f est dérivable sur $]1,+\infty[$ *et calculer f'(x) .*

2°)Etudier la dérivabilité de f à droite en 1 et interpréter le résultat obtenu.

3°)Dresser le tableau de variation de f .

4°)Montrer que f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ *sur un intervalle J que l'on précisera .*

5°)Montrer que pour tout x de J : $f^{-1}(x) = \dfrac{1+x^2}{2x}$

6°)On désigne par C et C' les courbe respectives de f et f^{-1} *dans même repère orthonormé .*

montrer que la droite D : y = 2x est une asymptote oblique à C.

7°)Tracer C et C' .

8°)Soit g la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ *par* $g(x) = f\left(\dfrac{1}{\cos(x)}\right)$

a) *Montrer que pour tout x de* $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ *,* $g(x) = \dfrac{1+\sin(x)}{\cos(x)}$

b) *Montrer que g réalise une bijection de* $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ *sur un intervalle K qu l'on précisera .*

c) *Montrer que* g^{-1} *est dérivable sur K et pour tout x de K :* $\left(g^{-1}\right)'(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$