

<http://afimath.jimdo.com/>

Thèmes abordés :

Complexes ; Probabilités ; Géométrie dans l'espace ; Fonction exponentielle et lecture graphique.

Exercice n°1 ©

Soit θ un réel de l'intervalle $]0, \pi[$.

1. Résoudre l'équation $z^2 - 2iz - 1 - e^{2i\theta} = 0$.
2. Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ on considère les points A, M et N d'affixes respectives $-1+i$; $i+e^{i\theta}$ et $i-e^{i\theta}$ où θ est un réel de l'intervalle $]0, \pi[$.
 - a) Montrer que les vecteurs \overrightarrow{AM} et \overrightarrow{AN} sont orthogonaux.
 - b) Montrer que lorsque θ varie dans $]0, \pi[$, les points M et N varient sur un cercle (\mathcal{C}) que l'on déterminera.
 3. a) Déterminer en fonction de θ l'aire $\mathcal{A}(\theta)$ du triangle AMN.
b) Déterminer la valeur de θ pour la quelle l'aire $\mathcal{A}(\theta)$ est maximale et placer dans ce cas les points M et N sur le cercle (\mathcal{C}).

Exercice n°2 ©

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples constitué de six questions ; chacune comporte trois réponses, une seule est exacte. On notera sur la copie uniquement la lettre correspondant à la réponse choisie.

Un lecteur d'une bibliothèque est passionné de romans policiers et de biographies. Cette bibliothèque lui propose 150 romans policiers et 50 biographies.

40% des écrivains de romans policiers sont français et 70% des écrivains de biographies sont français. Le lecteur choisit un livre au hasard parmi les 200 ouvrages.

1. La probabilité que le lecteur choisisse un roman policier est :
 - a. 0,4
 - b. 0,75
 - c. $\frac{1}{150}$.
2. Le lecteur ayant choisi un roman policier, la probabilité que l'auteur soit français est :
 - a. 0,3
 - b. 0,8
 - c. 0,4
3. La probabilité que le lecteur choisisse un roman policier français est :
 - a. 1,15
 - b. 0,4
 - c. 0,3
4. La probabilité que le lecteur choisisse un livre d'un écrivain français est :
 - a. 0,9
 - b. 0,7
 - c. 0,475
5. La probabilité que le lecteur ait choisi un roman policier sachant que l'écrivain est français est :
 - a. $\frac{4}{150}$
 - b. $\frac{12}{19}$
 - c. 0,3
6. Le lecteur est venu 20 fois à la bibliothèque. La probabilité qu'il ait choisi au moins un roman policier est :
 - a. $1-(0,25)^{20}$
 - b. $20 \times 0,75$
 - c. $0,75 \times (0,25)^{20}$

Exercice n°3 ©

L'espace est rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

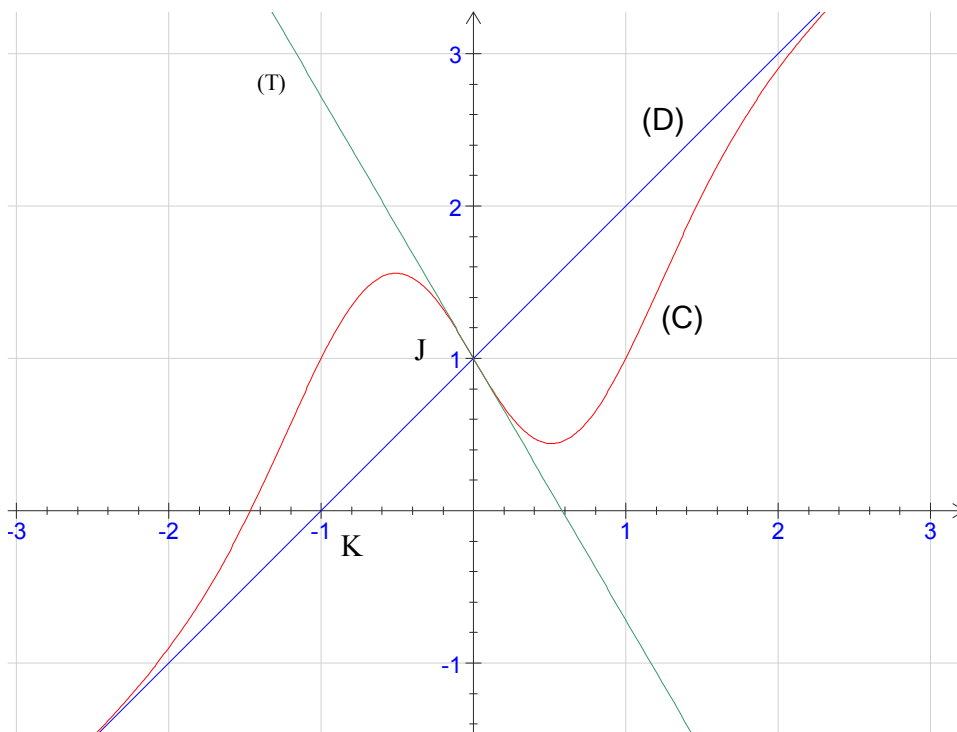
On considère le plan P d'équation $2x + y - 2z + 4 = 0$ et les points A de coordonnées $(3, 2, 6)$, B de coordonnées $(1, 2, 4)$ et C de coordonnées $(4, -2, 5)$.

1. a. Vérifier que les points A, B et C définissent un plan.
b. Vérifier que ce plan est P.
2. a. Montrer que le triangle ABC est rectangle.
b. Ecrire un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par O et perpendiculaire au plan P.
c. Soit K le projeté orthogonal de O sur P. Calculer la distance OK.
d. Calculer le volume du tétraèdre OABC.
3. On considère dans cette question le point G barycentre du système de points pondérés $S = \{(O, 3), (A, 1), (B, 1), (C, 1)\}$.
a. On note I le centre de gravité du triangle ABC. Montrer que G appartient à (OI).
b. Déterminer la distance de G au plan P.
4. Soit Γ l'ensemble des points M de l'espace vérifiant $\|3\vec{MO} + \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = 5$. Déterminer Γ . Quelle est la nature de l'ensemble des points communs à P et Γ ?

Exercice n°4 ©

Au dessous, figurent la courbe représentative (C) dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'une fonction f définie et dérivable sur \mathbb{R} ainsi que son asymptote (D) et sa tangente (T) au point d'abscisse O.

On sait que le point $J(0; 1)$ est le centre de symétrie de la courbe (C), que l'asymptote (D) passe par les points $K(-1; 0)$ et J, et que la tangente (T) a pour équation $y = (1 - e)x + 1$.



1. Déterminer une équation de (D).
2. On suppose qu'il existe deux réels m et p et une fonction φ définie sur \mathbb{R} telle que, pour tout réel x , $f(x) = mx + p + \varphi(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$.
 - a) Démontrer que $m = p = 1$.
 - b) En utilisant le point J , montrer que, pour tout réel x , on a $f(x) + f(-x) = 2$.
 - c) En déduire, après avoir exprimé $f(x)$ et $f(-x)$, que la fonction φ est impaire.
 - d) Déduire de la question b. que f' , dérivée de f , est paire.
3. On suppose maintenant que, pour tout réel x , $\varphi(x) = (ax + b)e^{-x^2}$ où a et b sont des réels.
 - a) En utilisant la parité de φ , démontrer que $b = 0$.
 - b) Calculer $f'(x)$.
 - c) En utilisant le coefficient directeur de (T), démontrer que $a = -e$.
 - d) Démontrer que $f(x) = x + 1 - xe^{-x^2+1}$.

Exercice n°1

Soit θ un réel de l'intervalle $]0, \pi[$.

1. $z^2 - 2iz - 1 - e^{2i\theta} = 0$

$$\Delta' = (-i)^2 - (-1 - e^{2i\theta}) = -1 + 1 + e^{2i\theta} = e^{2i\theta} = (e^{i\theta})^2$$

$$z' = i - e^{i\theta} \text{ et } z' = i + e^{i\theta}$$

2. A, M et N d'affixes respectives $-1+i$; $i + e^{i\theta}$ et $i - e^{i\theta}$ où θ est un réel de l'intervalle $]0, \pi[$.

a) $z_{\overline{AM}} = z_M - z_A = 1 + e^{i\theta}$; $z_{\overline{AN}} = z_N - z_A = 1 - e^{i\theta}$

$$\overline{AM} \begin{pmatrix} 1 + \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \text{ et } \overline{AN} \begin{pmatrix} 1 - \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix}$$

$$\overline{AM} \cdot \overline{AN} = (1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta) - \sin^2 \theta = 1 - (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 0$$

$\Rightarrow \overline{AM}$ et \overline{AN} sont orthogonaux.

b) Soit I le point d'affixe i, on a : $|z_M - z_I| = |e^{i\theta}| = 1 \Rightarrow M \in \zeta_{(I,1)}$

De même $|z_N - z_I| = |-e^{i\theta}| = 1 \Rightarrow N \in \zeta_{(I,1)}$

3. a) $\mathcal{A}(\theta)$

$$\begin{aligned} &= \frac{AM \times AN}{2} = \frac{\sqrt{(1 + \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta} \times \sqrt{(1 - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2 + 2 \cos \theta} \times \sqrt{2 - 2 \cos \theta}}{2} = \sin \theta \end{aligned}$$

b) $\mathcal{A}(\theta)$ est maximale lorsque $\sin \theta = 1 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \in]0, \pi[$.

Dans ce cas M(2i) et N(0) = O.

Remarque :

$$z_{\overline{AM}} = z_M - z_A = 1 + e^{i\theta} = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$$

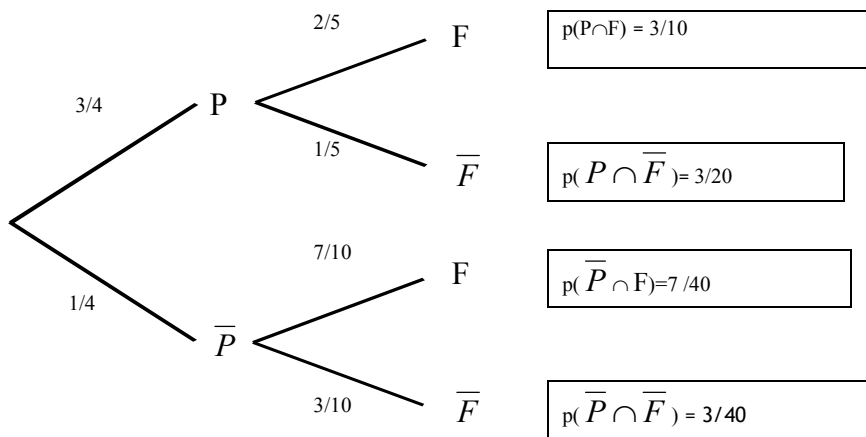
$$z_{\overline{AN}} = z_N - z_A = 1 - e^{i\theta} = 2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$$

$\Rightarrow \frac{z_{\overline{AN}}}{z_{\overline{AM}}} = i \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ c'est un imaginaire pur $\Rightarrow \overline{AM}$ et \overline{AN} sont orthogonaux.

$$\mathcal{A}(\theta) = \frac{AM \times AN}{2} = \frac{2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \times 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2} = \sin \theta$$

Exercice n°2

On note P l'évènement : « le roman est policier » et F l'évènement : « l'écrivain est français »
On peut modéliser la situation proposée par l'arbre pondéré ci-dessous :



1. La probabilité que le lecteur choisisse un roman policier est : **b. 0,75**
2. Le lecteur ayant choisi un roman policier, la probabilité que l'auteur soit français est : **c. 0,4**
3. La probabilité que le lecteur choisisse un roman policier français est : **c. 0,3**
4. La probabilité que le lecteur choisisse un livre d'un écrivain français est : **c. 0,475**
5. La probabilité que le lecteur ait choisi un roman policier sachant que l'écrivain est français est : **b. $\frac{12}{19}$**
6. Le lecteur est venu 20 fois à la bibliothèque. La probabilité qu'il ait choisi au moins un roman policier est : **a. $1 - (0,25)^{20}$**

Exercice n°3

1. a) $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires $\left(\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 8 \neq 0 \right) \Rightarrow A, B \text{ et } C \text{ ne sont pas}$

alignés $\Rightarrow A, B \text{ et } C \text{ déterminent un plan.}$

b) On vérifie que les coordonnées de chacun des points A, B et C vérifient l'équation $2x + y - 2z + 4 = 0 \Rightarrow P = (ABC).$

2. a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -2 \times 1 + 0 \times (-4) + (-2) \times (-1) = 0 \Rightarrow ABC \text{ est un triangle rectangle en A.}$

b) Δ est la perpendiculaire à P passant par O $\Rightarrow \vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ vecteur normal de P est directeur de Δ

$$\Rightarrow \Delta : \begin{cases} x = 2\alpha \\ y = \alpha \\ z = -2\alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$$

c) Soit K le projeté orthogonal de O sur P

$$OK = d(O, P) = \frac{|2 \times 0 + 0 - 2 \times 0 + 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{4}{3}$$

$$d) \mathcal{V}(\text{OABC}) = \frac{1}{3} \times A(\text{ABC}) \times OK = \frac{1}{3} \times \frac{AB \times AC}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} \times 4}{3 \times 2 \times 3} = \frac{8}{3}$$

$$\text{Autrement : } \mathcal{V}(\text{OABC}) = \frac{1}{6} |(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \cdot \vec{AO}|$$

$$\text{Où } \vec{AB} \wedge \vec{AC} \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{V}(\text{OABC}) = \frac{1}{6} |-8 \times (-3) + (-4) \times (-2) + 8 \times (-6)| = \frac{1}{6} \times 16 = \frac{8}{3}$$

3. G barycentre du système de points pondérés $S = \{(O, 3), (A, 1), (B, 1), (C, 1)\}$

$$\Leftrightarrow 3\vec{GO} + \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0} \quad (1)$$

a) I est le centre de gravité du triangle ABC $\Rightarrow \vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} = \vec{0}$

En intercalant le point I dans (1), on obtient : $3\vec{GO} + 3\vec{GI} = \vec{0} \Rightarrow \vec{GO} + \vec{GI} = \vec{0}$

\Rightarrow G est le milieu de [OI] $\Rightarrow G \in (OI)$.

b) $d(G, P) = ?$

$$I \left(\frac{3+1+4}{3}, \frac{2+2-2}{3}, \frac{6+4+5}{3} \right) \Rightarrow I \left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}, 5 \right)$$

$$G \text{ est le milieu de } [OI] \Rightarrow G \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{2} \right)$$

$$\Rightarrow d(G, P) = \frac{|2 \times \frac{4}{3} + \frac{1}{3} - 2 \times \frac{5}{2} + 4|}{3} = \frac{2}{3}$$

4. $\|3\vec{MO} + \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = 5 \Leftrightarrow \|6\vec{MG}\| = 5 \Leftrightarrow GM = \frac{5}{6} \Leftrightarrow M \in S_{\left(G, \frac{5}{6}\right)}$: la sphère de centre G et de

rayon $\frac{5}{6}$.

$d(G, P) = \frac{2}{3} < \frac{5}{6} \Rightarrow \Gamma \cap P$ est un cercle de centre le point H projeté orthogonal de G sur P et de

$$\text{rayon } r = \sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{36}} = \frac{1}{2}$$

Exercice n°4

1. La droite (D) passe par les points $J(0 ; 1)$ et $K(-1 ; 0)$, une équation est donc $y = x + 1$.
2. a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (mx + p) = 0$, c'est-à-dire que la droite d'équation $y = mx + p$ est asymptote à la courbe en $+\infty$, c'est la droite (D). Donc $m = p = 1$.
b. Le point J est centre de symétrie de la courbe, on a donc la relation :
$$f(2 \times 0 - x) = 2 \times 1 - f(x), \text{ ou encore } f(x) + f(-x) = 2.$$

c. $f(x) = x + 1 + \varphi(x), f(-x) = -x + 1 + \varphi(-x)$ donc $f(x) + f(-x) = 2 + \varphi(x) + \varphi(-x)$.
Or, on sait que $f(x) + f(-x) = 2$, on en déduit que $\varphi(x) + \varphi(-x) = 0$, ou encore que $\varphi(x) = -\varphi(-x)$, c'est-à-dire que la fonction φ est impaire.
d. $f(x) + f(-x) = 2$, donc, en dérivant chaque terme : $f'(x) - f'(-x) = 0$, soit $f'(x) = f'(-x)$.
Conclusion : f' est paire. Attention, la dérivée de $f(-x)$ est $-f'(-x)$ (dérivée des fonctions composées).
3. a. $\varphi(x) = (ax + b)e^{-x^2} \Rightarrow \varphi(-x) = (-ax + b)e^{-x^2}$; comme φ est impaire, on a $ax + b = -ax + b$, soit $b = 0$.
b. $f(x) = x + 1 + \varphi(x) = x + 1 + axe^{-x^2} \Rightarrow f'(x) = 1 + \varphi'(x) = 1 + ae^{-x^2} + (ax)(-2x)e^{-x^2} = 1 + a(1 - 2x^2)e^{-x^2}$.
c. Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 0, soit J , est $f'(0) = (1 - e)$ (équation de (T)). On a donc l'égalité : $f'(0) = 1 + a = 1 - e \Rightarrow a = -e$.
d. Il reste à conclure : $f(x) = x + 1 + axe^{-x^2} = x + 1 - exe^{-x^2}$.