4$^{\text{ème}}$ année
Section : Maths

Sujet de révision n°3

AFIF BEN ISMAIL
2010-2011

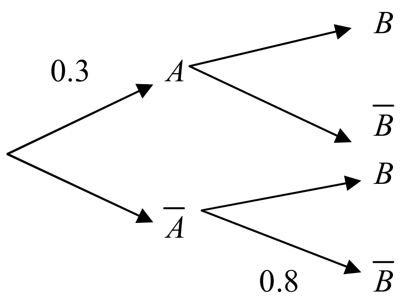
Thèmes abordés :

Similitude ; Arithmétique ; Espace ; Equations différentielles du second ordre ; primitives et intégrales.

Exercice n°1 : ©

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois propositions est exacte.

1) On a représenté une expérience aléatoire par l'arbre de probabilité ci – dessous :



Sachant que p(B) = 0.41 alors P(B|A) = :
   (a) 0,3.
   (b) 0,9.
   (c) 0,6.

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. (C) est la courbe représentative de la fonction f définie par f(x) = $\sqrt{1+\ln x}$. On fait tourner autour de l'axe des abscisses l'arc de la courbe constitué par les points de (C) d'abscisses comprises entre 1 et e. Le volume de $\mathcal{V}$ du solide ainsi engendré est :

   (a) π.

   (b) πe.

   (c) π(e – 1).

3) Une primitive sur IR de la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$ est :

   (a) $x \mapsto \ln\left(\sqrt{x^2+1}\right)$

   (b) $x \mapsto \ln\left(x^2+1\right)$

   (c) $x \mapsto 2\ln\left(x^2+1\right)$.

Exercice n°2 :

Dans le plan orienté, on considère un carré ABCD de centre O tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

On désigne par I le milieu du segment [AB] et par Δ la droite qui porte la bissectrice intérieure de $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$.

1) Soit f la similitude directe qui envoie I en O et B en C.
(a) Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de f.
(b) Montrer que le point A est le centre de f. En déduire la forme réduite de f.

2) Soit R la rotation de centre A et d'angle dont une mesure est $\frac{\pi}{4}$.

(a) Vérifier que R = $S_{(AC)} \circ S_{\Delta}$.

(b) Soit σ = f $\circ S_{\Delta}$. Prouver que σ est une similitude indirecte et déterminer sa forme réduite.

3) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\Omega,\vec{u},\vec{v}\right)$.

Soient $z_A = -1+i$; $z_C = i\sqrt{2}$; $z_E = 2-4i$ et $z_F = 3+2i$ les affixes respectifs des points A, C, E et F.

(a) Montrer que la transformation complexe de g qui à tout point M d'affixe z associe le point M ′ d'affixe z′ tel que : $z' = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\bar{z} - 1 + i\left(1+\sqrt{2}\right)$ est celle de la symétrie orthogonale d'axe (AC).

(b) Montrer que la forme complexe de σ est $z' = (1+i)\bar{z} - 1 + 3i$.

4) (a) Déterminer l'affixe du point G = σ(E), puis vérifier que $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont orthogonaux.

(b) On considère un point M d'affixe $z = x+iy$, où $(x,y) \in IR^2$.

Montrer que $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AM'}$ avec M ′ = σ (M) sont orthogonaux si et seulement si $5x+3y=-2$.

(c) Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation : $5x+3y=-2$.

(d) En déduire les points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle [-6, 6] tels que $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AM'}$ sont orthogonaux.

Exercice n°3 : ©

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $3x - 2y = 1$.
2) Soit n un entier naturel non nul.
   (a) Montrer que le couple (14n + 3, 21n + 4) est une solution de (E).
   (b) En déduire que pgcd (14n + 3, 21n + 4) = 1.
3) Soit d le plus grand commun diviseur de 2n + 1 et 21n + 4.
   (a) Montrer que d = 1 ou d = 13.
   (b) Montrer que n ≡ 6 (mod 13) ⇔ d = 13.
4) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose :
   $A = 21n^2 - 17n - 4$ et $B = 28n^3 - 8n^2 - 17n - 3$.

   (a) Montrer que A et B sont divisibles par n – 1 dans $\mathbb{Z}$.
   (b) Déterminer en fonction de n, le pgcd de A et B.

Exercice n°4 : ©

Soit ABCDEFGH un cube d'arête 1. On désigne par P le centre de gravité du triangle HGF et Q le centre de gravité du triangle FBG et on muni l'espace du repère orthonormé direct $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$

1) (a) Donner une représentation paramétrique de la droite (BH).
   (b) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (ACF) est $-x+y+z=0$

   (c) Déterminer les points W de la droite (BH) tel que le volume de tétraèdre ACFW est égale à $\frac{11}{6}$

2) Soit K le milieu de [FG] et h l'homothétie de centre K et de rapport $\frac{1}{3}$
   (a) Montrer que h(H) =P et h(B) = Q
   (b) Donner l'expression analytique de h.
3) Soit le plan (R) : $-x+y+z-\frac{1}{3}=0$
   (a) Montrer que (R) l'image du plan (ACF) par h.

   (b) Vérifier que (BH) est perpendiculaire à (ACF) en un point N que l'on déterminera les coordonnées. En déduire que (R) est perpendiculaire à (PQ) en un point N' que l'on déterminera les coordonnées.

   (c) Donner une équation cartésienne de la sphère S tangente aux plans (R) et (ACF) et dont le centre appartient à la droite (NN').

Exercice n°5 : ©

1. Déterminer l'ensemble des solutions définies sur IR, de l'équation différentielle suivante : (E) : $y'' + y = 0$.
2. Soit g une fonction deux fois dérivable sur IR*.

   On définit la fonction *f* de IR* dans IR par : $f(x)=xg\left(\frac{1}{x}\right)$.

   Exprimer f'' (x) à l'aide de $g''\left(\frac{1}{x}\right)$ et de x.

3. On considère l'équation différentielle (E′) : $y''=-\frac{1}{x^4}y$.

   Montrer que la fonction g est solution de (E′), si et seulement si, la fonction *f* définie pour tout réel non nul x par $f(x)=xg\left(\frac{1}{x}\right)$ est solution de (E).

4. En déduire toutes les solutions de (E′) définies sur chacun des intervalles]- ∞, 0[et]0, + ∞[.
5. Soit g une solution de l'équation (E′) définie sur]0, + ∞[.
   (a) Déduire des questions précédentes une primitive de la fonction $x\mapsto\frac{1}{x^4}g(x)$
   (b) Calculer la valeur de l'intégrale $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{x^3}\sin\left(\frac{1}{x}\right)dx$

Exercice n°1 :

1) P(B) = p(A) × p(B|A) + p($\overline{A}$) × p(B|$\overline{A}$) ⇒ p(B|A) = $\dfrac{0.41-0.7\times 0.2}{0.3} = 0.9$

2) $\mathcal{V} = \int_1^e \pi\left(1+\ln x\right)dx = \pi\left[x + x\ln x - x\right]_1^e = \pi e$

3) Une primitive sur IR de la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1} = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{2x}{x^2+1}$ est : $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1) = \ln\left(\sqrt{x^2+1}\right)$.

Exercice n°3 :

1) (x, y) est une solution de (E) ⇔ $3x - 2y = 1$.
(1, 1) est une solution particulière ⇔ 3 × 1 – 2 × 1 = 1

⇒ $3(x-1) - 2(y-1) = 0 \Rightarrow 3(x-1) = 2(y-1) \Rightarrow 3|2(y-1)$, or $3 \wedge 2 = 1 \Rightarrow 3|(y-1) \Rightarrow$ il existe k ∈ $\mathbb{Z}$

tel que $y - 1 = 3k \Rightarrow y = 1 + 3k$, or $3(x-1) = 2(y-1) \Rightarrow 3(x-1) = 2\times 3k \Rightarrow x = 1 + 2k$

⇒ $(x, y) = (1 + 2k, 1 + 3k)$; k ∈ $\mathbb{Z}$.

Inversement : ∀ k ∈ $\mathbb{Z}$, 3(1 + 2k) – 2(1 + 3k) = 1 ⇒ (1 + 2k, 1 + 3k) est une solution de (E).

Ainsi $S_{\mathbb{Z}^2} = \{(1+2k,\ 1+3k)\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$

2) Soit n un entier naturel non nul.
(a) (14n + 3, 21n + 4) est une solution de (E).
(b) (14n + 3) × 3 + (21n + 4) × (-2) = 1, avec (3, - 2) ∈ $\mathbb{Z}^2$ alors d'après l'identité de Bezout on a :
14n + 3 et 21n + 4 sont premiers entre eux ⇒ pgcd (14n + 3, 21n + 4) = 1.

3) Soit d le plus grand commun diviseur de 2n + 1 et 21n + 4.
(a) d|2n + 1 et d|21n + 4 ⇒ d|21(2n + 1) – 2(21n + 4) ⇒ d|13, or d ∈ IN* ⇒ d = 1 ou d = 13.

(b) n ≡ 6 (mod 13) ⇔ d = 13 ?

- Si n ≡ 6 (mod 13) alors 2n + 1 ≡ 0 (mod 13) et 21n + 4 ≡ 0 (mod 13) ⇒ 13|2n + 1 et 13|21n + 4 ⇒ 13|d, or d|13 ⇒ d = 13.

- Inversement : si d = 13 ⇒ 13|2n + 1 et 13|21n + 4 ⇒ 13|21n + 4 – 10(2n + 1) ⇒ 13|n – 6 ⇒ n – 6 ≡ 0 (mod13) ⇒ n ≡ 6 (mod 13).

4) (a) A = 21n² - 17n – 4 = (n – 1)(21n + 4) ⇒ (n – 1)|A

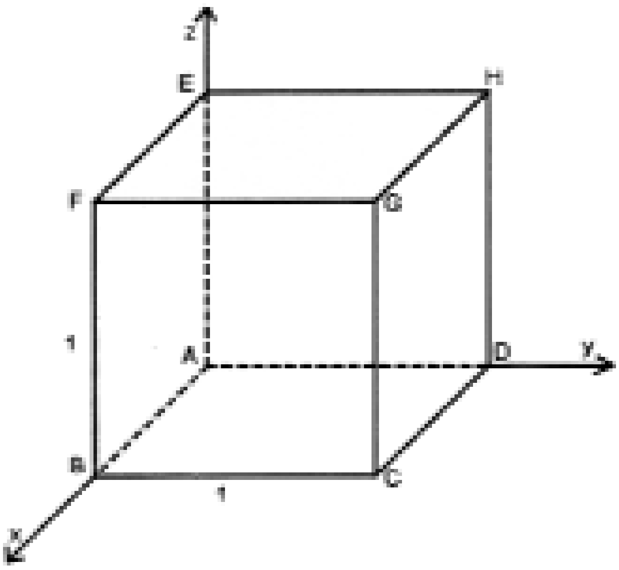
B = 28n³ – 8n² - 17n – 3 = (n – 1)(28n² + 20n + 3) = (n – 1)(14n + 3)(2n + 1) ⇒ (n – 1)|B

(b) A ∧ B = (n – 1)(21n + 4) ∧ (n – 1)(14n + 3)(2n + 1) = (n – 1)[(21n + 4) ∧ (14n + 3)(2n + 1)], or

pgcd (14n + 3, 21n + 4) = 1 ⇒ A ∧ B = (n – 1)[(21n + 4) ∧ (2n + 1)]

- Si n ≡ 6 (mod 13) alors A Λ B = 13(n – 1)
- Si non alors A Λ B = n – 1.

Exercice n°4 :



1) (a) B(1, 0, 0) et H(0, 1, 1) $\Rightarrow \overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow(BH) : \begin{cases} x = 1-\alpha \\ y = \alpha \qquad ;\alpha \in IR \\ z = \alpha \end{cases}$

(b) A(0, 0, 0) ; C(1, 1, 0) et F(1, 0, 1)

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$

Est un vecteur normal à (ACF)

$\Rightarrow$ (ACF) : $x-y-z+$ d $= 0$, or A(0, 0, 0) ∈ (ACF) $\Rightarrow$ d = 0 $\Rightarrow$ (ACF) : $x-y-z = 0$.

(c) W ∈ (BH) et V(ACFW) = $\frac{11}{6} \Rightarrow \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AF}\right)\cdot\overrightarrow{AW}\right| = \frac{11}{6} \Rightarrow \left|\left(\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AF}\right)\cdot\overrightarrow{AW}\right| = 11$

Or W (1 - α, α, α) ⇒ |1 - α - α - α| = 11 ⇒ 1 - 3α = 11 ou 1 - 3α = - 11 ⇒ α = - $\frac{10}{3}$ ou α = 4

$\Rightarrow$ W $\left(\frac{13}{3},-\frac{10}{3},-\frac{10}{3}\right)$ ou W (-3, 4, 4).

2) Soit K le milieu de [FG] et h l'homothétie de centre K et de rapport $\frac{1}{3}$

(a) P est le centre de gravité du triangle HGF et Q le centre de gravité du triangle FBG

$\Rightarrow \overrightarrow{KP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{KH}$ et $\overrightarrow{KQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{KB} \Rightarrow$ h(H) = P et h(B) = Q.

(b) h(M) = M′ $\Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{3}x + \left(1-\frac{1}{3}\right)x_K \\ y' = \frac{1}{3}y + \left(1-\frac{1}{3}\right)y_K \\ z' = \frac{1}{3}z + \left(1-\frac{1}{3}\right)z_K \end{cases}$, or K $\left(1,\frac{1}{2},1\right) \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \\ y' = \frac{1}{3}y + \frac{1}{3} \\ z' = \frac{1}{3}z + \frac{2}{3} \end{cases}$.

3) (a) (R) : $-x+y+z-\frac{1}{3}=0$

- (R) et (ACF) ont même vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow$ (R) // (ACF)

  Or A(0, 0, 0) $\in$ (ACF) et h(A) = A′ $\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) \in$ (R) $\Rightarrow$ h((ACF)) = (R).

(b)

- $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (ACF) $\Rightarrow$ (BH) $\perp$ (ACF)

  Soit N le point d'intersection de (BH) avec (ACF) $\Rightarrow$ les coordonnées de N vérifient : $\begin{cases}x=1-\alpha\\y=\alpha\\z=\alpha\\x-y-z=0\end{cases}$

  $\Rightarrow \alpha=\frac{1}{3} \Rightarrow N\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

- (BH) $\perp$ (ACF) en N, or h conserve l'orthogonalité et le contact

  $\Rightarrow$ h ((BH)) $\perp$ h ((ACF)) en h(N) = N′ $\Rightarrow$ (PQ) $\perp$ (R) en N′ $\left(\frac{8}{9},\frac{4}{9},\frac{7}{9}\right)$.

(c) S est la sphère tangente aux plans (R) et (ACF) et dont le centre appartient à la droite (NN').

- Soit I(a,b,c) le centre de la sphère

  On a : d(I, (ACF)) = d(I, (R)) $\Rightarrow \frac{|a-b-c|}{\sqrt{3}}=\frac{\left|a-b-c+\frac{1}{3}\right|}{\sqrt{3}} \Rightarrow$

  $\begin{cases}a-b-c=a-b-c+\frac{1}{3} \text{ impossible}\\ ou\\ a-b-c=-a+b+c-\frac{1}{3}\end{cases} \Rightarrow 2a-2b-2c+\frac{1}{3}=0$

De plus on a : I ∈ (NN′) : $\begin{cases} a = \frac{2}{3} + \frac{2}{9}t \\ b = \frac{1}{3} + \frac{1}{9}t \\ c = \frac{1}{3} + \frac{4}{9}t \end{cases}$; $t \in IR$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} + \frac{4}{9}t - \frac{2}{3} - \frac{2}{9}t - \frac{2}{3} - \frac{8}{9}t + \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2} \Rightarrow \mathrm{I}\left(\frac{7}{9}, \frac{7}{18}, \frac{5}{9}\right)$$

N.B : I est le milieu de [NN′].

- Soit R le rayon de la sphère ⇒ R = d(I, (ACF)) ⇒ R = $\dfrac{\left|\frac{7}{9} - \frac{7}{18} - \frac{5}{9}\right|}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{18}$

$$\Rightarrow \mathrm{S} : \left(x - \frac{7}{9}\right)^2 + \left(x - \frac{7}{18}\right)^2 + \left(x - \frac{5}{9}\right)^2 = \frac{1}{108}.$$

Exercice n°5 :

1) (E) : $y'' + y = 0 \Leftrightarrow y(x) = a\cos x + b\sin x$, où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

2) g une fonction deux fois dérivable sur IR* ; $f(x) = xg\left(\frac{1}{x}\right)$.

$$f'(x) = g\left(\frac{1}{x}\right) + x\left(-\frac{1}{x^2}g'\left(\frac{1}{x}\right)\right) = g\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}g'\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}g'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2}g'\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}g''\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{x^3}g''\left(\frac{1}{x}\right)$$

3) (E′) : $y'' = -\frac{1}{x^4}y$.

$f(x) = xg\left(\frac{1}{x}\right)$ est solution de (E)

$\Leftrightarrow f''(x) + f(x) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x^3}g''\left(\frac{1}{x}\right) + xg\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

$\Leftrightarrow g''\left(\frac{1}{x}\right) = -x^4 g\left(\frac{1}{x}\right)$, $\forall\, x \in$ IR*

$\Leftrightarrow g''(x) = -\frac{1}{x^4}g(x) \Leftrightarrow$ g est solution de (E′).

4) g est solution de (E′)

$$\Leftrightarrow f(x) = xg\left(\frac{1}{x}\right) \text{ est solution de (E)}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = xg\left(\frac{1}{x}\right) = a\cos x + b\sin x$$

$$\Leftrightarrow g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}\left(a\cos x + b\sin x\right)$$

$$\Leftrightarrow g\left(x\right) = x\left(a\cos\left(\frac{1}{x}\right) + b\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right),\ \forall\, x \in \text{IR}^*$$

5) Soit g une solution de l'équation (E′) définie sur]0, + ∞[.

$$\Leftrightarrow g\left(x\right) = x\left(a\cos\left(\frac{1}{x}\right) + b\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right),\ \forall\, x \in \left]0, +\infty\right[.$$

(a) Soit $h : x \mapsto \frac{1}{x^4} g(x) \Rightarrow h(x) = -g''(x)$, $\forall\, x \in \left]0, +\infty\right[$.

$\Rightarrow$ une primitive de h sur]0, + ∞[est H : $x \mapsto -g'(x)$

$$H(x) = -\left(a\cos\left(\frac{1}{x}\right) + b\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) - x\left[-\frac{1}{x^2}\left(-a\sin\left(\frac{1}{x}\right) + b\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right]$$

$$\Rightarrow H(x) = \left(-a + \frac{b}{x}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right) - \left(b + \frac{a}{x}\right)\sin\left(\frac{1}{x}\right),\ \forall\, x \in \left]0, +\infty\right[.$$

(b) $\displaystyle\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^3}\sin\left(\frac{1}{x}\right)dx = \int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^4} \times \left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)dx$

On prend $a = 0$ et $b = 1$, on aura $g(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

$$\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^4} \times \left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)dx = \int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^4} \times g(x)dx = \left[-g'(x)\right]_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} = g'\left(\frac{1}{\pi}\right) - g'\left(\frac{2}{\pi}\right)$$

Avec $g'(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow \displaystyle\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^3}\sin\left(\frac{1}{x}\right)dx = \pi - 1$