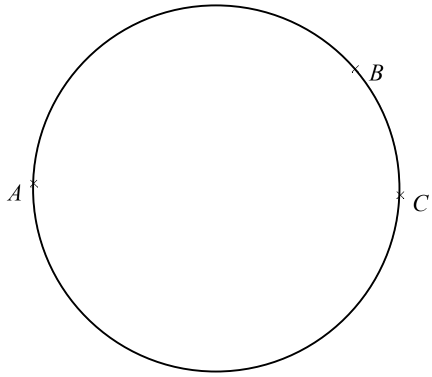
Thèmes abordés :

Similitude ; Arithmétique ; Probabilité ; Etude des fonctions logarithme et exponentielle ; Suite d'intégrales.

Exercice n°1 :

A et C sont deux points distincts du plan ; on note Γ le cercle de diamètre $[AC]$ et O le centre de Γ. B est un point du cercle Γ distinct des points A et C.
Le point D est construit tel que le triangle BCD soit équilatéral direct ; on a donc $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right) = \frac{\pi}{3}(2\pi)$.
Le point G est le centre de gravité du triangle BCD. Les droites (AB) et (CG) se coupent en un point M.



Partie A

1. Placer les points D, G et M sur la figure.
2. Montrer que les points O, D et G appartiennent à la médiatrice du segment $[BC]$ et que le point G est le milieu du segment $[CM]$.
3. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe s de centre C transformant B en M.

Partie B

Dans cette question le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ choisi de telle sorte que les points A et C aient pour affixes respectives -1 et $+1$.

Soit E le point construit pour que le triangle ACE soit équilatéral directe ; on a donc $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}\right) = \frac{\pi}{3}(2\pi)$.

1. Calculer l'affixe du point E et construire le point E sur la feuille annexe.
2. Soit σ la similitude directe d'expression complexe $z' = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1-i\sqrt{3}}{4}$. Déterminer les éléments caractéristiques de σ et en déduire que σ est la similitude réciproque de s.
3. Montrer que l'image E' de E par σ a pour affixe $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et montrer que le point E' appartient au cercle Γ.
4. On note Σ le lieu des points M lorsque le point B décrit le cercle Γ privé des points A et C. Montrer que le point E appartient à Σ.
Soit O' l'image du point O par la similitude s. Démontrer que le point O' est le centre de gravité du triangle ACE. En déduire une construction de Σ.

Exercice n°2 :

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

Proposition 1 : « Pour tout entier naturel n, 3 divise le nombre $2^{2n} - 1$ ».

Proposition 2 : « Si un entier relatif x est solution de l'équation $x^2+x\equiv 0\ (\text{modulo } 6)$ alors $x\equiv 0\ (\text{modulo } 3)$ ».

Proposition 3 : « L'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x\,;y)$ solutions de l'équation $12x - 5y = 3$ est l'ensemble des couples $(4+10k\,;9+24k)$ où $k\in\mathbb{Z}$ ».

Proposition 4 : « Il existe un seul couple $(a\,;b)$ de nombres entiers naturels, tel que $a < b$ et $\text{PPCM}(a, b) - \text{PGCD}(a, b) = 1$ ».

Deux entiers naturels M et N sont tels que M a pour écriture abc en base dix et N a pour écriture bca en base dix.
Proposition 5 : « Si l'entier M est divisible par 27 alors l'entier $M - N$ est aussi divisible par 27 ».

Exercice n°3 :

Un quincaillier achète des ampoules à trois fournisseurs dans les proportions suivantes : 20 % au premier fournisseur, 50 % au deuxième fournisseur et 30 % au troisième fournisseur.
Le premier fournisseur fabrique 97 % d'ampoules sans défaut, le deuxième fournisseur fabrique 98 % d'ampoules sans défaut, le troisième fournisseur fabrique 95 % d'ampoules sans défaut.

1. On choisit une ampoule au hasard dans le stock. On note
   D l'événement « l'ampoule est défectueuse »,
   F_1 l'événement « l'ampoule provient du premier fournisseur »,
   F_2 l'événement « l'ampoule provient du deuxième fournisseur » et
   F_3 l'événement « l'ampoule provient du troisième fournisseur ».

a. Calculer la probabilité de l'événement D, notée $P(D)$.
b. Sachant que l'ampoule choisie est défectueuse, quelle est la probabilité $P(F1/D)$ qu'elle provienne du premier fournisseur ?
Donner la valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-3} près de $P(F1/D)$.

2. On suppose que la probabilité qu'une ampoule soit sans défaut est de 0,969.
On monte 12 ampoules sur un lustre. Calculer la probabilité R qu'une ampoule au plus soit défectueuse.
On donnera une valeur approchée à 10^{-3} près de R.

3. La durée de vie en heures d'une ampoule, notée T, suit une loi de durée de vie sans vieillissement (ou loi exponentielle) de paramètre $\lambda = 1/50\,000 = 2.10^{-5}$.

a. Quelle est la probabilité P_1 qu'une ampoule dure plus de 25 000 heures ? Donner la valeur exacte de P_1.
b. Quelle est la probabilité P_2 qu'une ampoule dure plus de 50 000 heures ? Donner la valeur exacte de P_2.
c. Quelle est la probabilité P_3 qu'une ampoule dure plus de 50 000 heures, sachant qu'elle a déjà duré 25 000 heures ? Donner la valeur exacte de P_3.

Problème

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = x + \ln\left(1+e^{-2x}\right)$. Soit $\mathcal{C}$ sa courbe re^résentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$.

Première partie

1. (a) Donner le tableau de variation de f.

(b) Démontrer que la droite (D) d'équation y = x est une asymptote de la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage de + ∞.

(c) Etudier la position relative de (D) et $\mathcal{C}$.

(d) Construire dans le même repère (D) et $\mathcal{C}$.

2. (a) Montrer que f est une bijection de [0, + ∞[vers [ln2, + ∞[.

   (b) Construire la courbe $\mathcal{C}'$ de f^{-1} dans la même figure précédente.

3. (a) Montrer que : $\left(\forall t \in [0,+\infty[\right)\ 1-t \le \dfrac{1}{1+t} \le 1$

   (b) En déduire que : $\left(\forall x \in [0,+\infty[\right)\ x-\dfrac{x^2}{2} \le \ln(1+x) \le x$

   (c) En déduire l'encadrement de $\ln\left(1+e^{-2t}\right)$ pour tout $t \in [0,+\infty[$

4. Pour tout n ∈ IN* on note S_n la surface géométrique du domaine limité par C, (D) et les droites d'équations respectives : $x = 0$ et $x =$ n.

   (a) Montrer que (∀ n ∈ IN) $\dfrac{3}{8}-\dfrac{1}{2}e^{-2n}+\dfrac{1}{8}e^{-4n} \le S_n \le \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}e^{-2n}$

   (b) Montrer que la suite numérique $\left(S_n\right)_{n\ge 0}$ est convergente et donner un encadrement de sa limite ℓ.

Deuxième partie

On considère la suite numérique $\left(u_n\right)_{n\ge 0}$ définie par :

$u_0 = \int_0^{\ln 2} 1dt = \ln 2$ et (∀ n ∈ IN*) $u_n = \int_0^{\ln 2} \left(f'(t)\right)^n dt$

1. Calculer u_1

2. (a) Montrer que : $\left(\forall x \in [0,\ln 2]\right)\ 0 \le f'(x) \le \dfrac{3}{5}$

   (b) En déduire que : (∀ n ∈ IN) $0 \le u_n \le \left(\dfrac{3}{5}\right)^n \ln 2$

   (c) Calculer alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

3. (a) Montrer que : $\left(\forall x \in [0,+\infty[\right)\ 1-f''(x) = \left(f'(x)\right)^2$

   (b) Montrer que pour tout entier naturel n tel que : n ≥ 2 on a : $u_n = u_{n-2} - \dfrac{1}{n-1}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n-1}$

   (c) En déduire que : (∀ n ∈ IN*) $\begin{cases} u_{2n} = u_0 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}\left(\frac{3}{5}\right)^{2k-1} \\ u_{2n+1} = u_1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}\left(\frac{3}{5}\right)^{2k} \end{cases}$

4. Pour tout n ∈ IN* on pose : $V_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}\left(\frac{3}{5}\right)^k$. Montrer que $\left(V_n\right)_{n\ge 1}$ est convergente et déterminer sa limite.