FONCTIONS RÉCIPROQUES ET SUITES RÉELLES

Exercice n°1 :

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x)=\begin{cases} x\sqrt{2-x} & si \quad x\in]-\infty;2[\\ \sqrt{x-1}-\dfrac{2}{x} & si \quad x\in[2;+\infty[\end{cases}$

1) Etudier la continuité de f en 2.

2) Calculer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

3) Montrer que f est strictement croissante sur $]2\,;+\infty[$ et déterminer $f(]2\,;+\infty[)$.

4) a) Montrer que l'équation $f(x)=\dfrac{1}{2n}$ admet une solution unique $a_n\in[2\,;3]$ $\forall\ n\in IN^*$.

b) Montrer que la suite $(a_n)_n$ est décroissante.

c) En déduire que $(a_n)_n$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice N°2:

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$ et on désigne par (ζ) sa courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(o,\vec{i}\ ,\vec{j}\ )$.

1) a) Etudier les variations de f sur IR et dresser son tableau de variation.

b) Montrer que Ω(0,1) est un centre de symétrie pour la courbe (ζ).

c) Etudier les branches infinies de (ζ) .

d) Montrer que pour tout x de IR : $0\le f'(x)\le \dfrac{1}{2}$.

2) Montrer que f réalise une bijection de IR sur un intervalle J que l'on précisera.

3) Expliciter f (x) pour x $\in$ J.

4) soit la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par : g(x)= f(x)-2x

a) Montrer que g est strictement décroissante sur IR.

b) Montrer que la droite d'équation (Δ) : y=2x coupe la courbe (ζ) en un point unique d'abscisse α et que

$0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

4) Tracer la courbe (ζ) de f dans le repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

5) Soit la suite U définie sur IN par : $1 \leq U_0 < 2\alpha$ et pour tout $n \in IN$; $U_{n+1} = f(\frac{1}{2} U_n)$.

a) Montrer que pour tout $n \in IN$: $1 \leq U_n < 2\alpha$.

b) Montrer que pour tout $n \in IN$: $|U_{n+1} - 2\alpha| \leq \frac{1}{4} |U_n - 2\alpha|$.

c) En déduire que, pour tout $n \in IN$: $|U_n - 2\alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

d) Prouver que la suite U est convergente et déterminer sa limite.

Exercice N°3:

Soit g la fonction définie sur [0,2[par : $g(x) = tg(\frac{\pi}{4} x)$.

1) Montrer que g est une bijection de [0,2[sur $[0;+\infty[$.

2) Montrer que g est dérivable sur $[0;+\infty[$ et que $\forall x \in [0;+\infty[$: $(g)'(x) = \frac{4}{\pi\left(1+x^2\right)}$.

3) Tracer dans un même repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ les courbes(ζ) et (ζ') de g et g.

4) Soit V la suite définie sur IN* par : $V_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=n}^{2n} g^{-1}(1+\frac{1}{k})$

a) Montrer que pour tout $n \leq k \leq 2n$: $g(1+\frac{1}{2n}) \leq g(1+\frac{1}{k}) \leq g(1+\frac{1}{n})$.

b) En déduire que la suite V est convergente et calculer sa limite.

5) Soit f la fonction définie sur [0,2[par : $f(x) = \dfrac{1+\sin(\frac{\pi}{4}x)}{\cos(\frac{\pi}{4}x)}$

a) Montrer que f est une bijection de [0,2[sur $[1;+\infty[$.

b) Montrer que f est dérivable sur $[1;+\infty[$ et que $\forall$ $x \in [1;+\infty[$: $(f)'(x) = \dfrac{8}{\pi\left(1+x^2\right)}$.

c) Prouver que pour tout $x \in [1;+\infty[$: 2g (x)-f (x)=2.

Exercice n°4:

1) Soit g la fonction définie sur IR par : $g(x)= -1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$

a) Etudier les variations de g sur IR et dresser son tableau de variation.

b) En déduire que $g(x)<0$ $\forall$ x $\in$ IR.

2) Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)= 1-x+\sqrt{x^2+3}$ et On désigne par (ζ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé ($o,\vec{i},\vec{j}$).

a) Montrer que f'(x)= g(x) $\forall$ x $\in$ IR.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Montrer que f réalise une bijection de IR sur un intervalle I qu'on précisera.

d) Expliciter $f^{-1}(x)$ $\forall$ x $\in$ I.

3) Etudier les branches infinies de (ζ).

4) Montrer que l'équation f(x)=x admet une unique solution $\alpha \in]1,5\ ;2[$.

5) Soit (U_n) la suite réelle définie par : U_0 =1,5 et $\forall$ n $\in$ IN, $U_{n+1}=f(U_n)$

a) Montrer que $\forall$ n $\in$ IN ; $U_n>1$

b) Montrer que $\forall$ x $\in]1,+\infty[$ on a : $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$

c) Montrer alors que $\forall$ n $\in$ IN ; $|U_{n+1}-\alpha| \leq \dfrac{1}{2}|U_n-\alpha|$

d) En déduire que $|U_n-\alpha| \leq (\dfrac{1}{2})^n |U_0-\alpha|$ et calculer la limite de cette suite.

6) soit la fonction h définie sur $]\dfrac{-\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[$ par : $h(x) = g(\sqrt{3}tgx)$

a) Montrer que $\forall$ $x \in]\dfrac{-\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[$, h(x)= 1-sinx

b) Prouver que h réalise une bijection de $]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur un intervalle J qu'on précisera.

c) Montrer que h^{-1} est dérivable sur J et que $(h^{-1})'(x) = \frac{-1}{\sqrt{x^2+2x}}$

Exercice n°5 :

Soit f la fonction définie sur IR_+ par : $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x}}$.

1) Montrer que $\forall x \in IR_+ ; 0 \leq f(x) \leq x$.

2) Soit la suite $(U_n)_n$ définie par : $U_0=1$ et $U_{n+1}=f(U_n)$.

a) Montrer que $\forall n \in IN ; U_n \geq 0$.

b) Montrer que U_n est décroissante.

c) En déduire que U_n est convergente ; et calculer sa limite.

3) Soit la suite (V_n) définie par $V_0=1$ et $V_{n+1}=\frac{V_n}{U_n}$ $\forall n \in IN$;

a) Montrer que $\forall n \in IN^* ; V_{n+1} \geq \sqrt{2}\, V_n$.

b) En déduire que $\forall n \in IN^* ; V_n \geq \left(\sqrt{2}\right)^{n-1}$.

c) Calculer alors la limite de V_n lorsque n tend vers $+\infty$.