Exercice 1 :

Dans le plan orienté on considère deux cercle C_1 et C_2 de même rayon R > 0 et tangents extérieurement en A.
On note Δ = méd $[O_1O_2]$, t = $t_{\overrightarrow{O1O2}}$, r = r $(O2,\pi/3)$ et s = S_Δ
1/ On pose f = rot.

a) Préciser f (O_1) et en déduire l'image de C_1 par f.
b) Déterminer et construire A' = f (A) et montrer que Δ' = f (Δ) et tangente de C_2 en A'

2/ Soit I l'intersection de Δ et Δ' et J le symétrique de O_2 par rapport à Δ'.

a) Montrer que le triangle IAA' est équilatéral et que IO_1 O_2 J est un losange.
b) En déduire que f fixe le point I, caractériser alors f.

3/ On pose g = sof .

a) Déterminer g (I) et g (O_1) et en déduire la nature de l'isométrie g.
b) On note k = M * N avec N = g (M), déterminer l'ensemble des points K lorsque M décrit C_1.

Exercice 2 :

Dans le plan orienté on considère un triangle ABC rectangle isocèle en A tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ $\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Soit C le cercle de diamètre $[AB]$, r la rotation qui envoie B sur C et de centre A ; soit C' l'image de C par r.
On désigne par O le centre de C et O' le centre de C'
1/ a) Construire C et C', on note I le second point d'intersection de C et C' autre que A.
b) Montrer que $\forall$ M C on a I, M et M' = r (M) alignés.
c) En déduire que I = B * C, préciser la nature de IOAO'.
2/ Soit $r_1 = r_{(o\,;\pi/2)}$ et $r = r_{(o'\,;\pi/2)}$

a) Préciser l'image de B par f = $r_2 o r_1$ et par g = r_2^{-1} or_1
b) Déterminer la nature et les éléments caractéristique des applications f, g , $foS_{(AB)}$ et g o $S_{(BC)}$.

Exercice 3 :

On considère dans le plan orienté rapporté à un repère orthonormé direct les points A(2,0), B(2,2) et C(2,-2),
On désigne par r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, par r' la rotation de centre A et d'angle -$\frac{\pi}{2}$ et par s la symétrie centrale de centre B.
1/ Caractériser f = r'osor et construire f (C).
2/ Soit D la droite d'équation x + y – 2 = 0 et S_D la symétrie orthogonale d'axe D, caractériser $S_D$of.
3/ Soient I (1,0) ; J (0,1) on considère les rotations r_1 et r_J de centre respectifs I et J et d'angles $\frac{\pi}{2}$, t la translation de vecteur $\overrightarrow{IJ}$; caractériser h = r_1 otr_J.

Exercice 4 :

Dans le plan orienté on considère le triangle ABC non isocèle et tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$; a tout point M de la droite (AB) on associe le point N de la droite (AC) tel que M et N soient dans le même demi-plan de bord (BC) et BM = CN
1/ a) Montrer qu'il existe une unique rotation r tel que pour tout M $\in$ (AB) on a r (M) = N et r (B) = C
b) Préciser son angle et construire son centre Ω.
2/ Soit O = B * C, on désigne par $S_{(O\Omega)}$ la symétrie orthogonale d'axe (OΩ) . On pose f = $S_{(O\Omega)}$ or.
a) Déterminer f (B) et f (Ω)
b) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f.
3/ On considère l'application g = $S_{(AB)}$ o$S_{(AC)}$o$S_{(BC)}$.
a) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de $S_{(AB)}$ $S_{(AC)}$.

b) En décomposant S_A symétrie centrale de centre A en deux symétries orthogonales d'axes convenablement choisis, montrer que g est symétrie glissante dont on déterminera l'axe et le vecteur.

Exercice 5 :

Dans le plan orienté ; on considère un triangle ABC, soit ζ son cercle circonscrit.

I- On suppose que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et que AB = AC

Soient les rotations $r_1 = r_{(A,\pi/3)}$; $r_2 = r_{(B,\pi/3)}$; $r_3 = r_{(C,\pi/3)}$ et les translation t_1 et t_2 de vecteurs respectifs $\overrightarrow{BC}$ et $\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$, on pose B' = A * C

1/ Soit $r = r_3 o t_1 o r_2$ déterminer r (A) et r (B) et caractériser r

2/ Soit D le point de ζ diamétralement opposé à A, montrer que $S_{(BD)} o S_{(CD)} o S_{(AC)} o S_{(AB)}$ est une translation dont on précisera le vecteur.

3/ On pose $r' = r_1 o t_2$, déterminer r' (B') et en déduire la nature et les éléments caractéristiques de r'.

II- On suppose maintenant que $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$, on pose $C' = r_{(B,\pi/2)}(C)$

1) Déterminer l'ensemble des isométries qui laissent globalement invariants $\{B, C, C'\}$

2) Soit Δ la parallèle à (BC) passant par C' et $A' = r_{(B,\pi/2)}(A)$

On pose $f = S_{(AA')} o S_{(AB)} o S_{(CC')}$

a) Montrer que $S_{(AB)} o S_{(CC')} = S_{(CC')} o S_\Delta$

b) En déduire que f est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.

Exercice n :6

Dans le plan on considère un carré ABCD de centre I tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

I- Soient J = A*D et K = C * D, $C' = S_D(C)$, $R_D = r_{(D,\pi/2)}$, $R_B = r_{(B,\pi/2)}$ et $S = S_I$.

1) Soit $f = R_D o S_I o R_B$; caractériser f.

2) On pose $g = f o S_{(IJ)}$

a) Déterminer g (C) et g (D)

b) En déduire que g est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.

3) a) Caractériser $S_{(AD)} o S_{(CD)} o S_{(IK)} o S_{(IJ)}$

b) En déduire que $S_A o S_{(IJ)}$ est une symétrie glissante qu'on caractérisera

II – Soit Ω le point de concours des bissectrices intérieurs du triangle ABD, on désigne par r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r' la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

1) Construire le point A' image de A par r'

2) Donner la nature et les éléments caractéristiques de r'or

3) Montrer que $\Omega A' = \Omega A$ et que $(\Omega A')$ et (AB) sont parallèles

Exercice n : 7

Soit ABCD un carré de centre O tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$, on note I = A*B, J = B* C,K = C* D

1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que f (C) = J et f (J) = O ; donner une mesure de son angle

b) Caractériser fof et en déduire que f est une rotation de centre centreΩ = O *C.

2) a) Préciser l'image de O par f et déduire f (I) (on remarquera que $\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{OI}$)

b) Quelle est la nature du triangle ΩID ?

3)On pose $g = t_{\overrightarrow{CJ}} o f$, $h = S_{(BD)} o g$ et $\varphi = h o S_{(AB)}$

a) Préciser g(O) puis caractériser g.

b) En déduire l'image du carré ABCD par g

c) Déterminer h (O),h (J) puis caractériser h et φ

d) Montrer que $t_{\overrightarrow{AC}}$ oh est une symétrie glissante dont on précisera le vecteur et l'axe.

Exercice n : 8

On considère un triangle équilatéral direct ABC on appelle Γ le cercle circonscrit à ABC, la médiatrice du segment $[BC]$ coupe Γ en A et D , on appelle A' le point d'intersection des droites(BD) et (AC).

1) Montrer que A' = S_C (A)

2) Soit f = $S_{(BD)}$o $S_{(DC)}$ et g = $S_{(AC)}$o $S_{(AB)}$. Caractériser f et g.

3) Soit E le symétrique de B par rapport à la droite (AC). On pose h = $S_{(AC)}$o $S_{(AB)}$ o $S_{(BD)}$.

a) Déterminer h (B)

b) Montrer que h est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.

Exercice n :9

Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe

$z' = i\,\overline{z} - 2i + 3$

1) Montrer que f est une isométrie et qu'elle n'admet aucun point invariant

2) Montrer que fof est une translation dont on précisera le vecteur $\vec{u}$

3) Soit g = $t_{-\vec{u}/2}$ of, A d'affixe $\left(2-\frac{1}{2}i\right)$ et B d'affixe $\frac{5}{2}$

a) Déterminer g (A) et g (B)

b) En déduire la nature de g puis la nature et les éléments caractéristiques de f.

Exercice n : 10

Soit ABCD un carré tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ et I le centre de ce carré.

R_A, R_B et R_D Désignent les rotations de même angle $\frac{\pi}{2}$ et des centres respectifs A, B et D

et S_I désigne la symétrie centrale de centre I et Δ = méd $[IB]$

1) On pose f = R_Bo S_Io R_D . Préciser f (D) puis donner la nature et les éléments caractéristiques de f

2) On pose g = $t_{\overrightarrow{BD}}$ o R_A

a) Préciser g (B).En déduire que g est une rotation à préciser.

b) On suppose que (A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$) est un repère orthonormé direct.

Trouver la transformation complexe associées à la rotation g. En déduire l'affixe de g (I).

3) a) Soit h l'antidéplacement défini par : h (A) = B et h (B) = C.

Montrer que h est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.

b) Caractériser alors l'isométrie φ = S_Δ o h $t_{\overrightarrow{CB}}$ puis φ' = φ o $S_{(AC)}$.

Exercice n : 11

Dans un plan orienté , on considère un triangle ABC rectangle en B et tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$.

On désigne par O le milieu de $[AC]$ et par J le milieu de $[BC]$.

1) Montrer qu'il existe un seul déplacement R tel que : R (A) = O et R (B) = C

2) a) Montrer que est une rotation puis construire son centre D.

b) Donner la nature de ABOD.

3) On désigne par $R_C = r_{(C,\pi/3)}$; $R_B = r_{(B,\pi/3)}$ et T = $t_{\overrightarrow{BC}}$. On pose f = R_CoTo R_B.

a) Déterminer f (B)

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

4) Soit g = $t_{\overrightarrow{AB}}$ oS_O.

a) Caractériser g

b) On pose M' = $t_{\overrightarrow{AB}}$ (M) et M'' = S_O(M) ou M est un point quelconque du plan, montrer que J = M' * M''

c) Déduire l'ensemble des points M du plan tel que M'M'' = AB.

5) On désigne par I = O*A et K = A* B. Soit φ l'antidéplacement qui transforme B en A et A en O.

a) Montrer que φ est une symétrie glissante puis déterminer ses éléments caractéristiques.
b) Montrer que φ (O) = D.
c) Soit E = φ (D), montrer que E et B sont symétriques par rapport au point O.

Exercice n : 12

ABC est un triangle directe. On désigne par I, J et K les milieux respectifs des segments $[AB]$,$[AC]$et $[BC]$.
On construit extérieurement à ce triangle les triangles ABM et CAN rectangles et isocèles en M et N.
1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que f (I) = J et f (M) = K.
b) Déterminer l'angle de f
c) Montrer que f (K) = N
d) Déduire que le centre O de f est le milieu de $[MN]$

2) On considère les rotations r_1 et r_2 de même angle $-\frac{\pi}{2}$ et de centres respectifs M et N. On pose

$g = r_1 o\, r_2 o S_\Delta$. ou Δ la médiatrice de $[MK]$.
a) Caractériser l'application $r_1 o\, r_2$
b) Montrer que g est une symétrie glissante
c) Trouver la forme réduite de g.

Exercice n : 13

ABC est un triangle isocèle rectangle en A et direct. On désigne par $r_A = r_{(A,\pi/2)}$; $r_B = r_{(B,\pi/4)}$ et $r_C = r_{(C,\pi/4)}$.
1) Soit A' = r_C (A)
a) Montrer que A' appartient à la droite (BC).
b) En déduire l'image de la droite (AC) par la rotation r_C.
c) Donner l'image de (BC) par r_B et celle de (AB) par r_A.
2) On pose $f = r_A o\, r_B o\, r_C$
a) Montrer que f est une rotation
b) Soit M le centre de f. Montrer que $M \in$ (AC).
3) Soit I le point d'intersection des bissectrices intérieures du triangle ABC et J = r_A (I)
a) Caractériser $r_B o\, r_C$.
b) Montrer que M = I * J.
4) Soit N = r_A^{-1} (M)
a) Montrer qu'il existe un seul déplacement g telle que g (M) = N et g (J) = I.
b) Caractériser g.
c) Déterminer l'image par g de (AC).

Exercice n : 14

Dans le plan P orienté, on considère un carré ABCD de centre I et tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

On désigne par J et K les milieux respectifs de $[AD]$ et $[CD]$.
Soit le point de P tel que le triangle DBE est équilatéral de sens direct.
1) On pose $\psi = t_{\overrightarrow{BC}}\ o\ S_{(AC)}$.
a) Déterminer ψ (A) et ψ (D)
b) En déduire que ψ est symétrie glissante et déterminer ses élément caractéristiques
2) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement R du plan qui transforme B en A et A en D.
b) Caractériser R.
3) Soit l'application $g = R_{(B,\pi/6)}\ o\ R_{(E,\pi/3)}$
Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de g

4) Soit f la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$. On pose $T = gof^{-1}$.

Déterminer le point T (A) puis caractériser l'application T.
5) Soit M un point de P, on pose M_1 = f (M) et M_2 = g (M)
a) Quelle est la nature du quadrilatère $ABM_2\, M_1$?

b) Montrer qu'il existe un seul déplacement φ qui envoie A sur M_1 et D sur M_2

c) Comparer φ et $t_{\overrightarrow{AM1}}$ o $S_{(AI)}$.

En déduire la nature et les éléments caractéristiques de φ dans chacun des cas suivants :

- M appartient à la droite (BD)
- M appartient à la parallèle à (AC) passant par D

6) Soit Δ une droite variable passant par A et distincte de (AC).

On désigne par B' et D' les projetés orthogonaux respectifs de B et D sur Δ

a) Soit Δ' la droite perpendiculaire à Δ passant par D .
Déterminer les images par f des droites Δ et Δ' . En déduire l'images de D' par f

b) Montrer que le cercle de diamètre $[$ D'B'$]$ passe par un point fixe lorsque Δ varie.