Exercice 1 :

Soit : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \longmapsto \dfrac{1-\sqrt{1+4x}}{1+\sqrt{1+4x}}$

1) Déterminer le domaine de définition I de f
2) Etudier les variations de f et déduire f (I)
3) Montrer que f est une bijection de I sur f (I) = J
4) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$
5) Préciser le domaine de définition de $g : x \longmapsto f^{-1}(\cos x)$ puis résoudre dans $\mathbb{R}$: g (x) = 2

Exercice 2 :

I- Soit $f\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^3 - x^2 + 3x + 1$:

1) Montrer que l'équation f (x) = 0 , admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$ et que $\alpha \in \left]-\frac{1}{3},0\right[$
2) Montrer que $f(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-1}{x^2+3} = x$
3) Etudier les variations de la fonction h : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \dfrac{x^2-1}{x^2+3}$
4) Montrer que la restriction g de h sur $]-\infty,0]$ est une bijection de $]-\infty,0]$ sur un intervalle J que l'on précisera.
5) Expliciter $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

Exercice 3 :

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \longmapsto \dfrac{1}{2}\left(x^2 - \dfrac{1}{x^2}\right)$

1-a- Montrer que f est dérivable ; calculer f ' (x), et résoudre f '(x) = 0
b- Montrer que f ' est dérivable ; calculer f '' (x), et résoudre f ''(x) = 0
c- Représenter Cf dans un R.O.N $(O,\vec{i},\vec{j})$
2-a- Montrer que l'équation f (x) = x admet une unique solution x_0 tel que $2 < x_0 < 3$
(on ne cherchera pas à calculer x_0)
b-Vérifier que $\sqrt{x_0^2+1} = x_0^2 - x_0$
3-a- Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$, dans un intervalle J que l'on déterminera.
b- Expliquer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$
c- Construire C' courbe de f^{-1} sur le même repère que Cf

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie sur $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$; $f(x) = \dfrac{1}{1-\sin \pi x}$

1- Montrer que f est une bijection de $I = \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$ sur un intervalle J
2- Déterminer le domaine de dérivabilité de f^{-1} qu'on notera K et calculer $(f^{-1})'(x)$; $\forall x \in K$
3- Construire Cf et Cf^{-1} sur le même repère.

Exercice 5 :

Soit $f : \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [0,1]$, $x \longmapsto \sin^2 x$

1-a- Montrer que f réalise une bijection ; soit g sa bijection réciproque
b- Calculer $g\left(\frac{1}{2}\right)$, $g\left(\frac{3}{4}\right)$ et $g\left(\frac{1}{4}\right)$
2- a- sur quel intervalle J, g est dérivable ? et montrer que $\forall x \in J$ $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$
b- Construire Cf et Cg sur le même repère
3- Soit h définie sur $[0,1]$ par $h(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, Montrer que g o h dérivable sur $]0,1]$ et $(g \circ h)'(x) = -h(x)$

Exercice 6 :

Soit $\varphi : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto \operatorname{tg} t - t$

1- Etudier les variations de φ, Déterminer $\varphi\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\right)$ et $\varphi\left(\left]\frac{\pi}{2},\pi\right]\right)$

En déduire le signe de φ (t) pour $t \in [0,\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

2- Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x \sin\frac{\pi}{x} & si\ x \in \mathbb{R}^* \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

a- Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$

b- f est – elle dérivable en zéro ? Déterminer sa fonction dérivée lorsqu'elle existe.

c- Résoudre f (x) = 0 dans $\mathbb{R}$

3- Soit g la restriction de f sur $[1,+\infty[$

a- Etudier les variations de g (on utilisera φ pour étudier le signe de g ' (x)), Calculer g (1), g (2) et g (6)

b- Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J qu'on précisera

c- g^{-1} est elle dérivable sur J ? Calculer $(g^{-1})'(2)$ et $(g^{-1})'(3)$

d- Tracer C_g et $C_{g^{-1}}$ sur le même R.O.N

Exercice 7 :

A-Soit $f : \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \operatorname{tg} x$

1- Etudier les variations de f et construire Cf

2- Montrer que f réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle J

3- Soit g la bijection réciproque de f

a- Etudier les variations, sa continuité, sa dérivabilité ainsi que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

b- Calculer g' (0) et g' (1)

c- Construire C_g dans le même repère que Cf.

B- Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \left[0,\frac{\pi}{2}\right[: x \longrightarrow \begin{cases} \varphi(x) = g\left(\frac{1}{x}\right)\ si\ x \neq 0 \\ \varphi(0) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

1- Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}_+$

2- Calculer pour $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\operatorname{tg}[\varphi(x)] \times \operatorname{tg}[g(x)]$ et en déduire que $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : \varphi(x) = \frac{\pi}{2} - g(x)$

3- Montrer que $x \in \mathbb{R}_+ : g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

4- Etudier les variations de φ

5- Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$ tel que a < b ; montrer que $0 < \varphi(a) - \varphi(b) < \frac{\pi}{2}$ et $\operatorname{tg}[\varphi(a) - \varphi(b)] = \frac{b-a}{1+ab}$

Exercice 8 :

Soit f la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ pour $\begin{cases} f(x) = \frac{3}{2} - \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\ si\ x \neq 0 \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$

1-a- Etudier les variations de $U : x \longmapsto x - \sin x$ et $V : x \longmapsto x - \operatorname{tg} x$ sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

b- En déduire que $\forall x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ on a : sin x < x < tg x c- Etablir que $\forall$ x $\in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ on a : $\frac{1}{\sin^2 x} - 1 < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2 x}$

2- a- Montrer que f est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

b- En utilisant (1) : montrer que $\forall$ x $\in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ on a $0 < f(x) - \frac{1}{2} < \sin^2 x$

c- En déduire que f est dérivable à droite en zéro et calculer f' (0)

3- Soit C la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $\varphi(x) = x \cos x - \sin x$

a- Etudier les variations de φ et en déduire le signe de $\varphi(x)$, sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

b- Montrer que f est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ et que $f'(x) = \frac{-2\sin x}{x^3}\varphi(x)$

4- a- Montrer que f réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2} - \frac{4}{\pi^2}\right] = J$

b- Montrer que f^{-1} est dérivable sur $\left]\frac{1}{2}, \frac{3}{2} - \frac{4}{\pi^2}\right]$; f^{-1} est elle dérivable à droite en $\frac{1}{2}$.

c- Calculer $(f^{-1})'\left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi^2}\right)$ et donne une équation de la demi tangente à Cf^{-1} au point d'abscisse $\left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi^2}\right)$

d- Construire Cf et Cf^{-1} sur le même repère ($\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 4$)

5- a- Montrer que l'équation f (x) = x admet au moins une solution $\alpha \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et que $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{4}$

b- Justifier graphiquement que α et unique

c- Résoudre dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ l'équation $\sqrt{2}\sin x = x\sqrt{3-2x}$

6- a- Soit U la suite définie par $U_0 = \frac{\pi}{6}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} = f(U_n)$

b- Etudier la monotone de U et en déduire qu'elle est convergente

c- Calculer alors sa limite

<u>Exercice 9</u> :

Soit : $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}_+ : x \longmapsto \sqrt{tg\, x}$

1- Montrer que f réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ dans un intervalle J que l'on précisera , on notera g sa bijection réciproque.

2- Construire sur le même repère Cf et Cg

3- Montrer que $\forall \in \mathbb{R}_+^*$: $g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

4- Montrer que $\forall \in \mathbb{N}^*$: $\forall K \in \{0,1,2,\ldots\ldots n\}$ $g(n) \leqslant g(n+k) \leqslant g(2n)$

5- Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}^*$: $g\left(\frac{1}{2n}\right) \leqslant U_n \leqslant g\left(\frac{1}{n}\right)$ et en déduire la limite de U_n en $+\infty$

<u>Exercice 10</u> :

Soit f : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto 1 - x + \sqrt{x^2 + 3}$

I- 1) Etudier les variation de f et montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera.

2) On note C la courbe de f selon un R.O.N $(O,\vec{i},\vec{j})$. Montrer que C admet une asymptote oblique D au voisinage de ($-\infty$)

3) étudier la position relative de C et D et faire la construction

4) Montrer que l'équation f (x) = x admet une unique solution dans $\mathbb{R}$. Qu'on notera x_0 et vérifier que $x_0 \in \left]\frac{3}{2},2\right[$

II- 1) Etudier les variations de f ' sur $\mathbb{R}$

2) a- Quel est l'image de $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$ par f ' ?

b- En déduire que $\forall$ x $\in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$, $|f'(x)| \leqslant \frac{3}{4}$

3) Soit U_n la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 2$ et $\forall$ n $\in \mathbb{N}$: $U_{n+1} = f(U_n)$

a- montrer que $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $U_n \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$

b- montrer que $\forall$ n $\in \mathbb{N}$: $|U_{n+1} - x_0| \leqslant \frac{3}{4}|U_n - x_0|$

c- en déduire que $\forall$ n $\in \mathbb{N}$: $|U_n - x_0| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n$ et calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} U_n$

III- Soit g : $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad x \longrightarrow f'(\cos x) + 1$

1- montrer que g réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

2- Calculer $g^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{13}}\right)$

3- étudier la dérivabilité de g^{-1} en $\frac{1}{2}$

4- Montrer que pour tout x $\in \left[0, \frac{1}{2}\right[$ g^{-1} est dérivable et que : $(g^{-1})'(x) = \dfrac{-\sqrt{3}}{(1-x^2)\sqrt{1-4x^2}}$

<u>Exercice 11</u> :

Soit g : $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$; $x \longrightarrow \begin{cases} g(x) = \operatorname{tg} x & \text{si } x < 0 \\ g(x) = \operatorname{tg} x - \frac{4}{3}x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

1) a) Dresser le tableau de variation de g

b) Tracer la courbe de g

2) Soit h la restriction de g à $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$

a) Montrer que h réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ sur un intervalle J que l'on précisera

b) Tracer la courbe de h^{-1}

c) montrer que $\forall$ x $\in$g ; $h^{-1}(x) + h^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$

3) Montrer que l'équation g (x) = 0 admet une seule solution non nulle α et que $\alpha \in \left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right[$

4) Soit φ la fonction définie sur $\left[\alpha, \frac{\pi}{3}\right]$ par $\varphi(x) = x - \dfrac{g(x)}{g'(x)}$

a) montrer que $\forall$ x $\in \left[\alpha, \frac{\pi}{3}\right]$ $\varphi(x) \leqslant x$

b) Montrer que α est l'unique solution de $\varphi(x) = x$

c) Dresser le tableau de variation de φ et en déduire que : $\forall$ x $\in \left[\alpha, \frac{\pi}{3}\right]$ on a $\varphi(x) \in \left[\alpha, \frac{\pi}{3}\right]$

5) Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $V_0 = \frac{\pi}{3}$, $\forall$ x $\in \mathbb{N}$ $V_{n+1} = \varphi(V_n)$

a) Montrer que $\forall$ n $\in \mathbb{N}$: $V_n \in \left[\alpha, \frac{\pi}{3}\right]$

b) Montrer que la suite V_n converge vers α.