L'espace est muni d'une repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Produit scalaire dans l'espace.

Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et les point O , M , N tels que $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$.

On appelle produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le réel noté $\vec{u}.\vec{v}$ et défini comme suit :

♦*Si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$ alors $\vec{u}.\vec{v}=\vec{0}$.*

♦*Si $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}$ alors $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\cos\left(A\hat{O}B\right)$*

Conséquence

1°) $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$ où H est le projeté orthogonal de B sur (OA).

2°) $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$

3°) $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$

4) $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}.\vec{v}=0$

Propriétés :

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs et a et b deux réels.

$\vec{u}^{\,2}=\|\vec{u}\|^2$	$\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$	$(a\vec{u}).(b\vec{v})=ab(\vec{u}.\vec{v})$
$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\vec{u}.\vec{v}$		$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2\vec{u}.\vec{v}$
$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2+\|\vec{u}-\vec{v}\|=2\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2\right)$		$\vec{u}(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$

Déterminant

Soit B=$\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$est une base

Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique triplet (x,y,z) de réels tel que $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

M(x,yz) → $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$,$\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}a''\\b''\\c''\end{pmatrix}$

*On appelle déterminant de $\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)$dans la base **B**, et on note det$_{\boldsymbol{B}}\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)=\begin{vmatrix}a&a'&a''\\b&b'&b''\\c&c'&c''\end{vmatrix}$ le réel :*

$$a\begin{vmatrix}b'&b''\\c'&c''\end{vmatrix}-b\begin{vmatrix}a'&a''\\c'&c''\end{vmatrix}+c\begin{vmatrix}a'&a''\\b'&b''\end{vmatrix}$$

Produit vectoriel dans l'espace.

Définition :

Soit $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs .

On appelle produit vectoriel de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, le vecteur défini comme suite :

▪*Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$*

▪*Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors :*

i. $\vec{u}\perp\vec{u}\wedge\vec{v}$ et $\vec{v}\perp\vec{u}\wedge\vec{v}$.

ii. $\left(\vec{u},\vec{v},\vec{u}\wedge\vec{v}\right)$ est une base direct.

iii. $\left\|\vec{u}\wedge\vec{v}\right\| = \left\|\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\| sin\left(B\hat{A}C\right)$

Conséquences et propriétés

$\vec{u}\wedge\vec{u}=\vec{0}$	$\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$, *si et seulement si* , $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont colinéaires*	
$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times sin\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\vec{k}$ *où* $\vec{k}$ *unitaire et normale au plan (ABC)*	$\vec{u}\wedge\vec{v} = -\left(\vec{v}\wedge\vec{u}\right)$	$a\vec{u}\wedge b\vec{v} = ab\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right)$
$\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right).\vec{w} = \left(\vec{v}\wedge\vec{w}\right).\vec{u} = \left(\vec{w}\wedge\vec{u}\right).\vec{v} = det\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)$	$\vec{u}\wedge\left(\vec{v}+\vec{w}\right) = \vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{u}\wedge\vec{w}$	
Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ *alors :* $\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix}b & b'\\c & c'\end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix}a & a'\\c & c'\end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix}a & a'\\b & b'\end{vmatrix}\vec{k}$		

Propriétés

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$ *des vecteurs de l'espace.*

L'aire du parallélogramme ABCD est égale à : $\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right\|$	*L'aire du triangle ABD est égale à :* $\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right\|$
Le volume d'un tétraèdre ABCD est égale à : $\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}\right).\overrightarrow{BA}\right|$	*Le volume d'un parallélépipède ABCDEFGH est égale à :* $\left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right).\overrightarrow{AE}\right| = det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$
La distance d'un point M de l'espace à la droite $\Delta\left(A,\vec{u}\right)$ *est le réel :* $d(M,\Delta) = \dfrac{\left\|\overrightarrow{MA}\wedge\vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|} = \dfrac{\left\|\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}$ *avec* $B\in\Delta$	

Droites et plans de l'espace

Soit $A(x_0,y_0,z_0)$, $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$

Droite:

L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ *et* $\vec{u}$ *soient colinéaires est une droite, appelé droite passant par A et de vecteur directeur* $\vec{u}$.

$D(A,\vec{u}) = \left\{M\in\wp / \quad \exists\alpha\in R, \quad \overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u}\right\}$

• $D(A,\vec{u}) // D(B,\vec{v})$ *si et seulement si* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont colinéaires .*

Représentation paramétrique : $D(A,\vec{u}) : \begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases} ; \lambda\in R$

Plan:

Dans le cas où $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *non colinéaires:*

L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ *soit combinaison linéaire de* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *, est un plan, appelé plan passant par A et de vecteurs directeurs* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$.

$P(A,\vec{u},\vec{v}) = \left\{M\in\xi / \quad \exists\alpha,\beta\in R, \quad \overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u}+\beta\vec{v}\right\}$

• $D(A,\vec{u}) // P(B,\vec{v},\vec{w})$ *si et seulement si la famille* $\left\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right\}$ *est liée .*

• $P(A,\vec{u},\vec{v}) // Q(B,\vec{u'},\vec{v'})$ *si et seulement si les familles* $\left\{\vec{u},\vec{v},\vec{u'}\right\}$ *et* $\left\{\vec{u},\vec{v},\vec{v'}\right\}$ *sont liées .*

Représentation paramétrique : $P(A,\vec{u},\vec{v}) : \begin{cases} x = x_0 + \lambda a + \beta a' \\ y = y_0 + \lambda b + \beta b' \\ z = z_0 + \lambda c + \beta c' \end{cases} ; \lambda\in R$

Equation cartésienne d'un plan

$P : ax + by + cz + d = 0$ avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$

*)Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est le vecteur normale à P.

*)Le vecteur $\vec{x}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ est un vecteur de P si et seulement si $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$

Position relatives

Soit $D(A,\vec{u})$, $D'(A',\vec{u'})$, $P : ax + by + cz + d = 0$ et $P' : a'x + b'y + c'z + d' = 0$

Leur vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\vec{n'}$

*) $D \perp D'$ si et seulement si $\vec{u} \perp \vec{u'}$

*) $D // D'$ si et seulement si $\vec{u} // \vec{u'}$

*) $P \perp P'$ si et seulement si $\vec{n} \perp \vec{n'}$

*) $P // P'$ si et seulement si $\vec{n} // \vec{u}$

*) $P \perp D$ si et seulement si $\vec{n} \perp \vec{n'}$

*) $P // D$ si et seulement si $\vec{n} \perp \vec{u}$

La sphère

Etant donnés un point I de ξ et un réel R strictement positif. On appelle sphère de centre I et de rayon R, et on note $\zeta_{(I,R)}$ l'ensemble des points M de ξ tels que : IM = R.

Autre définition : Soit la sphère ζ de diamètre [AB]. $M \in \zeta \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB}$

Equation cartésienne d'un sphère : $\zeta_{(I(a,b,c),R)}$: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$

Réciproquement :

Soit $E = \{M(x,y,z) \in \xi / \quad x^2 + y^2 + z^2 + \alpha x + \beta y + \gamma z + d = 0\}$

On pose $h = \dfrac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{4} - d$

Si $h < 0$ alors $E = \phi$	Si $h = 0$ alors $E = \left\{ I(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2}) \right\}$	Si $h > 0$ alors $E = \zeta_{(I,\sqrt{h})}$

Intersection d'une sphère et d'un plan.

Soit ζ une sphère de centre I et de rayon R. Soient P un plan , H le projeté orthogonal de I sur P et $d = (I,P)$.

Si $d > R$ alors $P \cap \zeta = \emptyset$, on dit que P et ζ sont extérieurs.

Si $d = R$ alors $P \cap \zeta = \{H\}$, on dit que P et ζ sont tangents.

Si $0 < d < R$ alors $P \cap \zeta$ est le cercle de P de centre H et de rayon $\sqrt{R^2 - d^2}$, on dit que P et ζ sont sécants.