

# Produit scalaire et produit vectoriel dans l'espace

Soient A, B et C trois points quelconques de l'espace.

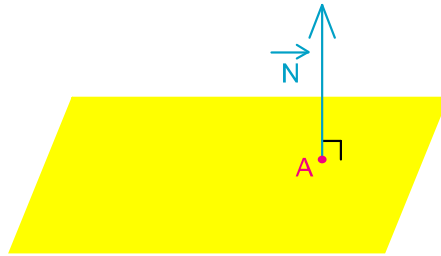
$$\text{On a : } \vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos \hat{BAC}$$

Soient  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  une base orthonormée

de l'espace et  $\vec{u}(x,y,z)$ ,  $\vec{v}(x',y',z')$  deux vecteurs de l'espace. On a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x x' + y y' + z z'$$

Le plan passant par A et de vecteur normal  $\vec{N}$ , est l'ensemble des points M tels que  $\vec{AM} \cdot \vec{N} = 0$



Soit le plan P d'équation :  $a x + b y + c z + d = 0$  avec  $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ .

Le vecteur  $\vec{N} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  est un vecteur normal à P.

Soient le plan  $P : a x + b y + c z + d = 0$ ,

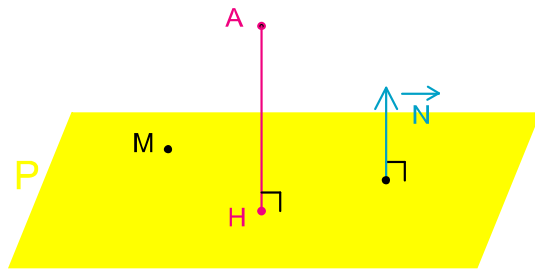
$A(x_A, y_A, z_A)$  un point de l'espace et  $H$  le projeté orthogonal de  $A$  sur  $P$ .

Soit  $M$  un point de  $P$  et  $\vec{N} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  un

vecteur normal à  $P$ .

La distance du point  $A$  au plan  $P$  est le réel défini par :

$$d(A, P) = AH = \frac{|\vec{AM} \cdot \vec{N}|}{\|\vec{N}\|} = \frac{|a x_A + b y_A + c z_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$



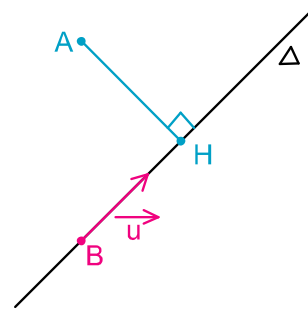
(D) une droite de l'espace de vecteur

directeur  $\vec{u}$  et passant par  $B$ .

$A$  un point de l'espace et  $H$  son projeté orthogonal sur (D).

La distance du point  $A$  à la droite (D) est le réel défini par :  $d(A, (D)) = AH$ .

$$AH = \frac{\|\vec{AB} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$



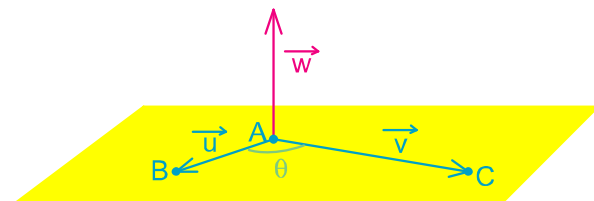
### Définition :

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de l'espace orienté et  $A, B$  et  $C$  trois points tels que  $\vec{AB} = \vec{u}$  et  $\vec{AC} = \vec{v}$ . On appelle produit vectoriel de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , le vecteur  $\vec{w}$ , noté  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  défini par :

\* Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires, alors  $\vec{w} = \vec{0}$ .

\* Sinon alors

- 1/  $\vec{w}$  est normal au plan (ABC)
- 2/  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  est une base directe
- 3/  $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\widehat{BAC})$



Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls et non colinéaires de l'espace.

Soit  $\theta$  une mesure de l'angle orienté  $(\vec{u}, \vec{v})$ .  
On a :

$$\sin \theta = \frac{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \quad \text{et} \quad \cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}.$$

Dans une base orthonormée directe  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on

considère les vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ . On a :

$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge \vec{v} &= \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k}. \\ &= (y z' - z y') \vec{i} - (x z' - z x') \vec{j} + (x y' - y x') \vec{k} \end{aligned}$$

Soit P un plan de vecteurs directeurs

$\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

Le vecteur  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  est un vecteur normal au plan P.

Soient A, B et C trois points de l'espace.

L'aire du triangle ABC est :

$$\frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|.$$

Le volume d'un parallélépipède ABCDEFGH est  $\mathcal{V} = |(\overline{AB} \wedge \overline{AD}) \cdot \overline{AE}|$ .

Le volume d'un un tétraèdre ABCD est  $\mathcal{V} = \frac{1}{6} |(\overline{BC} \wedge \overline{BD}) \cdot \overline{BA}|$ .