Dérivabilité

AFIF BEN ISMAIL

Exercice 1 : Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{4},+\infty\right[$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{1+tg(x)} & \text{si } x\in\left]-\frac{\pi}{4},0\right] \\ f(x)=1-x+\sqrt{x^2+2x} & \text{si } x\in\left]0,+\infty\right[\end{cases}$

1. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$.

2. a. Vérifier que f est continue en 0.

b. Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3. On désigne par g la restriction de f à l'intervalle $\left]0,+\infty\right[$.

a. Montrer que g réalise une bijection de $\left]0,+\infty\right[$ sur un intervalle I que l'on précisera.

b. Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x\in$ I.

4. On désigne par h la restriction de f à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{4},0\right]$.

a. Montrer que h une bijection de $\left]-\frac{\pi}{4},0\right]$ sur $\left[1,+\infty\right[$.

b. Montrer h^{-1} est dérivable sur $\left[1,+\infty\right[$ et que pour tout $x\in\left[1,+\infty\right[$ $(h^{-1})'(x) = \dfrac{-1}{2x^2-2x+1}$.

5. Soit φ la fonction définie sur $\left]-\infty,0\right]$ par : $\begin{cases} \varphi(x)=h^{-1}\left(\dfrac{x-1}{x}\right) & \text{si } x\prec 0 \\ \varphi(0)=-\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

a. Montrer que φ est continue en 0.

b. Montrer que φ est dérivable sur $\left]-\infty,0\right[$ et calculer $\varphi'(x)$ pour tout $x\prec 0$.

c. Montrer que pour tout $x\in\left]-\infty,0\right[$ il existe un réel $c_x\in\left]x,0\right[$ tel que $\dfrac{\varphi(x)+\frac{\pi}{4}}{x}=\dfrac{-1}{(c_x-1)^2+1}$.

En déduire φ est dérivable à gauche en 0 et déterminer $\varphi'_g(0)$

Exercice 2 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

1. a. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\left]-1,1\right[$.

b. Montrer que pour tout $x\in\left]-1,1\right[$, $f^{-1}(x) = -1+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

2. Pour tout $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ on pose $\varphi(x) = f^{-1}(\sin x)$.

a. Vérifier que pour tout $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ $\varphi(x) = tg(x)-1$.

b. Montrer que φ est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

c. Montrer φ^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $(\varphi^{-1})'(x)$ pour tout $\mathbb{R}$.

3. Soit ψ la fonction définie sur $\left]-1,+\infty\right[$ par : $\psi(x) = \varphi^{-1}\left(\dfrac{-x}{1+x}\right)+\varphi^{-1}(x)$.

a. Calculer $\psi(0)$.

b. Montrer que ψ est dérivable sur $\left]-1,+\infty\right[$ et calculer $\psi'(x)$ pour tout $x\in\left]-1,+\infty\right[$.

c. En déduire que pour tout $x\in\left]-1,+\infty\right[$ on a : $\varphi^{-1}\left(\dfrac{-x}{1+x}\right)+\varphi^{-1}(x)=\dfrac{\pi}{2}$.

Nsib kais