EXERCICE N°1

On pose pour a *réel strictement positif la fonction* f_a *définie sur* $[0,a]$ *par :*

Pour tout $x \in [0,a]$, $f_a(x) = \dfrac{a-x}{a(a+x)}$.

1°) Montrer que f_a *réalise une bijection de* $[0;a]$ *sur* $[0;\frac{1}{a}]$. *On note* f_a^{-1} *sa bijection réciproque.*

2°) Donner le tableau des variations de f_a^{-1} *en précisant les valeurs aux bornes.*

3°) Montrer que $f_a^{-1} = f_{\frac{1}{a}}$.

EXERCICE N°2

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ *par* $f(x) = \sqrt{4x^2+x} + 2x + 1$

1°)Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur $[0,+\infty[$

2°)Montrer que f est une bijection de $[0,+\infty[$ *sur un intervalle J que l'on précisera.*

3°)Sur quel ensemble f^{-1} *est-elle continue ?*

4°)Expliciter $f^{-1}(x)$ *pour* $x \in J$

5°)Montrer que l'équation $f(x) = x + 2$ *admet une solution unique* $\alpha \in \left]\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right[$

EXERCICE N°2

On considère la fonction f définie par : f(x) = (x + 1)$\sqrt{x+1}$ *- 1*

1°)Etudier la dérivabilité de f à droite en -1 .

2°)Etudier les variations de f.

3°)Montrer que est une bijection de $[-1,+\infty[$ *sur un intervalle I que l'on déterminera.*

4°)Expliciter la fonction réciproque g de f et déterminer la fonction dérivé de g .

EXERCICE N°3

Soit $f : x \mapsto f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$.

1°)Déterminer le domaine de définition D_f *de f.*

2°)Etudier la dérivabilité de f sur D_f .

3°)Montrer que f est une bijection de $[0,1[$ *sur un intervalle J que l'on précisera*

4°) Expliciter $f^{-1}(x)$ *pour* $x \in J$

EXERCICE N°4

Soit $f : x \mapsto f(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

1°) Etudier la dérivabilité de f sur R.

2°) Montrer que f est une bijection de R sur un intervalle J que l'on précisera

3°) Expliciter $f^{-1}(x)$ *pour* $x \in J$

4°)Montrer que f^{-1} *est dérivable sur J et calculer* $(f^{-1})'(1)$.

EXERCICE N°5

Soit f la fonction définie sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ *par : f(x) =* $\dfrac{1}{\sin(x)}$

1°)Etudier les variations de f .

2°)Montrer que f est une bijection de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ *sur un intervalle I que l'on déterminera .*

3°)On désigne par g la fonction réciproque de f. Calculer : g(1) , g($\sqrt{2}$ *) et g(2).*

4°)Montrer que g est dérivable sur I et que : $\forall x \in I \;:\; g'(x) = \dfrac{-1}{x\sqrt{1+x^2}}$

5°)Soit h la fonction numérique définie sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ *par :* $h(x) = f(x) + \frac{1}{4}$

Montrer que l'équation $h(x) = x$ *admet une solution unique* x_0 *telle que :* $\frac{\pi}{3} < x_0 < \frac{\pi}{2}$.

EXERCICE N°6

On considère la fonction f définie sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ *par* $f(x) = \tan(x)$

1°) Déterminer $f(0)$, $f(\frac{\pi}{4})$, $f(\frac{\pi}{3})$ *et* $f(\frac{\pi}{12})$

2°)Prouver que f est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ *sur un intervalle J que l'on déterminera.*

3°)Soit g la fonction réciproque de f .

- *(a) Préciser* D_g *et calculer* $g(0)$, $g(1)$, $g(\sqrt{3})$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$
- *(b) Montrer que* $g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ *et calculer* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}$
- *(c) Montrer que la fonction h définie par :* $h(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 1 & si \quad x = 0 \end{cases}$ *est continue sur R*

4°)Soit k la fonction définie sur R par : $k(x) = g(x^2) - g(\pi x)$

- *(a) Calculer k'(x) en fonction de x .*
- *(b) Calculer* $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{g(x^2) - g(\pi x)}{x-\pi}$

5°)Déterminer le sens de variation des fonctions u et v définies par :

$u : R_+ \to R$, $x \mapsto x - g(x)$ *et* $v : R_+ \to R$, $x \mapsto x - \frac{x^3}{3} - g(x)$

6°)En déduire que pour tout x de R_+ *on a :* $0 \leq x - g(x) \leq \frac{x^3}{3}$

EXERCICE N°7

On considère la fonction f définie sur $[-1,1] - \{0\}$ *par :* $f(x) = 1 + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

On note par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé R .

Partir A

1°)Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ *et interpréter les résultats obtenus*

2°)Etudier la dérivabilité de f en point d'abscisse x=1 et interpréter le résultat obtenu.

3°) Etudier la dérivabilité de f en point d'abscisse x=-1 et interpréter le résultat obtenu.

4°)Montrer que : $\forall x \in \left]-1,1\right[- \{0\}$: $f'(x) = \frac{-1}{x^2\sqrt{1-x^2}}$

5°)Dresser le tableau de variation de la fonction f .

6°)Montrer que f réalise une bijection de $\left]0,1\right[$ *sur un intervalle J que l'on précisera .*

7°)Expliciter $f^{-1}(x)$ *pour tout x de J .*

8°) Représenter dans le même repère R la courbe C et C' de f^{-1} .

Partie B

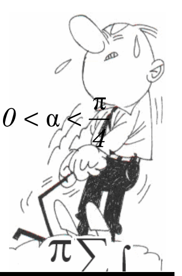
Soit g la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ *par* $g(x) = f(\cos x)$

1°) Montrer que pour tout x de : $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, $g(x) = 1 + \tan(x)$

2°)Etudier le sens de variation de la fonction g .

3°) Montrer que l'équation : $g(x) = x$ *admet une unique solution* α *dans* $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ *et vérifier que :* $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$

5°) Montrer que g réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ *sur un intervalle K qu l'on précisera*



6°)Montrer que g^{-1} est dérivable sur K et $\forall x \in K$: $\left(g^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x + 2}$

EXERCICE N°8

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto \begin{cases} x^3 + 12x + 1 & si \quad x \in \left]-\infty, 0\right] \\ \sqrt{1 + x^2} - x & si \quad x \in \left]0, +\infty\right[\end{cases}$

1°)Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

2°)Etudier la continuité de f sur D_f

3°)Etudier la dérivabilité de f en o .

4°)Calculer f'(x) puis dresser la tableau de variation de f .

5°)Montrer que l'équation f(x) = 0 admet dans $\left]-\infty, 0\right]$ une solution unique α .

Vérifier que $\alpha \in \left]\dfrac{-1}{12}, 0\right[$

6°)Soit g la restriction de f sur $\left]0, +\infty\right[$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $\left]0, +\infty\right[$ sur un intervalle J que l'on precisera .

b) Soit g^{-1} la fonction réciproque de g .

- i) Etudier la continuité et la dérivabilité de g^{-1} sur J
- ii) Expliciter $g^{-1}(x)$; pour tout x de J .

EXERCICE N°9

Soit $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{\sqrt{x+1} - 1}$

1°)Déterminer le domaine de définition D_f de f.

2°)Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur D_f .

3°)Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0, définir ce prolongement.

EXERCICE N°10

Soit f la fonction définie sur $\left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$ par : $f(x) = \sqrt[3]{2\cos x - 1}$

1°)Etudier le dérivabilité de f sur $\left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$.

2°)Montrer que f est une bijection de de $\left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$ sur $[0,1]$.

3°)Soit f^{-1} la réciproque de f, calculer $\left(f^{-1}\right)'\left(\sqrt[3]{\sqrt{3} - 1}\right)$

4°)Préciser le domine K de la dérivabilité de f^{-1} .

5°)Déterminer l'expression de $\left(f^{-1}\right)'(x)$ pour tout x de K.