Séries d'exercices *4ème sciences*

DERIVABILITES

MATHS AU LYCEE *** AFIF BEN ISMAIL

Site Web : http://afimath.jimdo.com/

EXERCICE N°1

Soit la fonction f définie sur [–1 ; +∞[par : $f(x)=\left|x^2+x\right|\sqrt{x+1}$.

1°) Déterminer le signe de P(x) = x^2+x *suivant les valeurs de x dans [–1 ; +∞[.*

1°) Etudier la dérivabilité de f en x = –1.

2°)Etudier la dérivabilité de f en x = 0.

3°)Conclure sur les tangentes à la courbe représentative de f aux points d'abscisse –1 et 0.

EXERCICE N°2

Soit f la fonction définie sur [-4 ,4] par : $\begin{cases} f(x)=-2x-4 & si\ x\in[-4\,;-2] \\ f(x)=2-x-x^2 & si\ x\in]-2\,;4]. \end{cases}$

On note (C) la courbe de f dans un repère orthonormal.
Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

a) $\lim\limits_{x\to(-2)^-}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2}=\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2}$.

b) *f est dérivable en x = –2.*
c) *(C) admet deux tangentes horizontales.*
d) *La tangente à (C) au point d'abscisse x = –1 a un unique point d'intersection avec (C).*
e) *La tangente à (C) au point d'abscisse x = 1 a un unique point d'intersection avec (C).*

EXERCICE N°3

Comparer, sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, $0.9\tan x$ *et* $\tan(0.9x)$

EXERCICE N°4

Montrer que :

1°)Pour tout x de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ *, on a :* $\dfrac{2}{\pi}x\le\sin x\le x$

2°) Pour tout x de $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ *, on a :* $x\le\tan x\le\dfrac{4}{\pi}x$

3°) Pour tout x de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ *, on a :* $1-\dfrac{2}{\pi}x\le\cos x\le\dfrac{\pi}{2}-x$

4°) Pour tout x de $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$ *on a :* $\dfrac{\pi}{2}-2x\le\cot an(x)-1\le\dfrac{\pi}{4}-x$

5°) Pour tout x>0 : $\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}\le\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\le\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

EXERCICE N°5

Montrer que : pour tout x de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ *, on a :* $2\sin x+\tan x\ge 3x$

EXERCICE N°6

Soit f une fonction deux fois dérivable sur R.
1°)Montrer que : si f est paire alors $\exists a\in R\ /\ f'(a)=0$
2°)Montrer que : si f est impaire alors $\exists b\in R\ /\ f''(b)=0$.

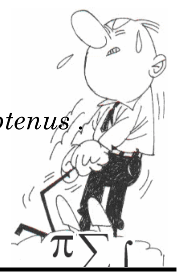
EXERCICE N°7

Partie I

Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ *par :* $f(x)=\begin{cases}\sqrt{2x} & si\quad x\ge 0\\ x^2-x & si\quad x<0\end{cases}$

1°)Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0 . Interpréter graphiquement les résultats obtenus .

2°)Montrer que $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2x}} & si\quad x>0\\ 2x-1 & si\quad x<0\end{cases}$



3°)Dresser le tableau des variations de f

4°)Montrer que si $x > 2$ *alors* $f(x) > 2$

5°)Montrer que , pour tout $x \geq 2$, $f'(x) \leq \dfrac{1}{2}$

Partie II

Soit $(u_n)_{n\in N}$ *la suite réelle définie par :* $u : \begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n} \end{cases}$

1°)Montrer que : pour tout n de N : $u_n > 2$.

2°) Etudier les variations de (u).

3°)En déduire que (u) est convergente et calculer sa limite.

4°)Montrer que , pour tout n de N : $u_{n+1} - 2 \leq \dfrac{u_n - 2}{2}$

5°)En déduire que , pour tout n de N : $u_n - 2 \leq \dfrac{1}{2^n}$ *. Retrouver alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

EXERCICE N°8

Pour tout entier n strictement positif, on définit la fonction f_n *sur l'intervalle [0, 1] par :* $f^n(x) = x^n\sqrt{1-x}$

1°) Calculer $f_n(0)$ *et* $f_n(1)$.

2°) a) Justifier que f_n *est dérivable sur [0, 1[et montrer que* $f_n'(x) = \dfrac{x^{n-1}}{2\sqrt{1-x}}(2n - (2n+1)x)$

b) Etudier la dérivabilité de f_n *en 1.*

c) Dresser le tableau de variations de f_n.

3°) a) Montrer que f_n *admet un maximum* a_n *que l'on exprimera en fonction de n.*

b) Prouver que $a_n \leq \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$

c) En déduire que la suite $(a_n)_{n\in IN}$ *est convergente et préciser sa limite.*