Exercice n°1 : ©

On définit la fonction f sur l'intervalle [0, π²] par : f(x) = $\cos\sqrt{x}$

1. a) Vérifier que pour tout réel x ∈ [0, π²] , f(x) – 1 = $-2\sin^2\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)$

   b) Démontrer que f est dérivable en zéro et donner f ′ (0)
2. a) Justifier que f est dérivable sur [0, π²] et calculer f ′ (x).

   b) Etudier le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation.
3. a) Résoudre dans [0, π²] l'équation : f(x) = 0.

   b) Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentant f au point d'abscisse $\dfrac{\pi^2}{4}$.

Exercice n°2 :

Soit la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x^2-1}+\pi x+\cos\pi x+1 & \text{si } x>1 \\ x^2-x+\pi & \text{si } x\le 1 \end{cases}$.

1. Etudier la continuité de f en 1.
2. a) Montrer que : $\forall x>1$, on a : $f(x)\ge\sqrt{x^2-1}+\pi x$.

   b) Déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
3. a) Justifier la dérivabilité de f sur $]1;+\infty[$.

   b) Prouver que : $\forall x>1$, on a : $f'(x)>0$.
4. Montrer que $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=+\infty$.

   Interpréter géométriquement le résultat obtenu.
5. Dresser le tableau de variation de f .
6. L'équation $f(x)=0$ possède – t- elle des solutions dans IR.
7. Soit la fonction $h:[0,\pi]\to IR$; $x\mapsto h(x)=f(3+\sin x)$.

   a) Justifier la dérivabilité de h sur $[0,\pi]$ et calculer h'(x).

   b) Dresser le tableau de variation de h.

Exercice n°3 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x^2+3}+x \text{ si } x\le -1 \\ 2+\cos\pi x \text{ si } -1<x\le 0 \\ \dfrac{2x+\sin x}{x} \text{ si } x>0 \end{cases}$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+2x$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

2. Montrer que pour $x>0$, on a : $\frac{2x-1}{x} \le f(x) \le \frac{2x+1}{x}$. En déduire $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
3. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
4. Etudier la dérivabilité de f en (-1) et interpréter géométriquement le résultat obtenu.
5. Dresser le tableau de variation de la restriction de f à $[-1,0]$.
6. a) Calculer $f'(x)$ pour $x>0$.

   b) Ecrire une équation cartésienne de la tangente T à ζ_f au point d'abscisse π.

Exercice n°4 : ©

On considère une fonction h définie sur $\mathbb{R}^*_+$ telle que : $h(1)=0$ et $h'(x)=\frac{1}{x}$

On pose $F(x)=h\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

1- Montrer que F est définie, dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$.

2- Montrer que F est une fonction impaire.

3- Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}_+$; $F(x)\le x$.

Exercice n°5 : ©

On définit dans $\mathbb{R}$ la fonction f par : $f(x)=1+\frac{x-1}{\sqrt{1+x^2}}$.

On désigne par ζ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Soit (u_n) la suite définie par la donnée de $u_0>1$ et par $u_{n+1}=f(u_n), n\in\mathbb{N}$.

1- Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n>1$.

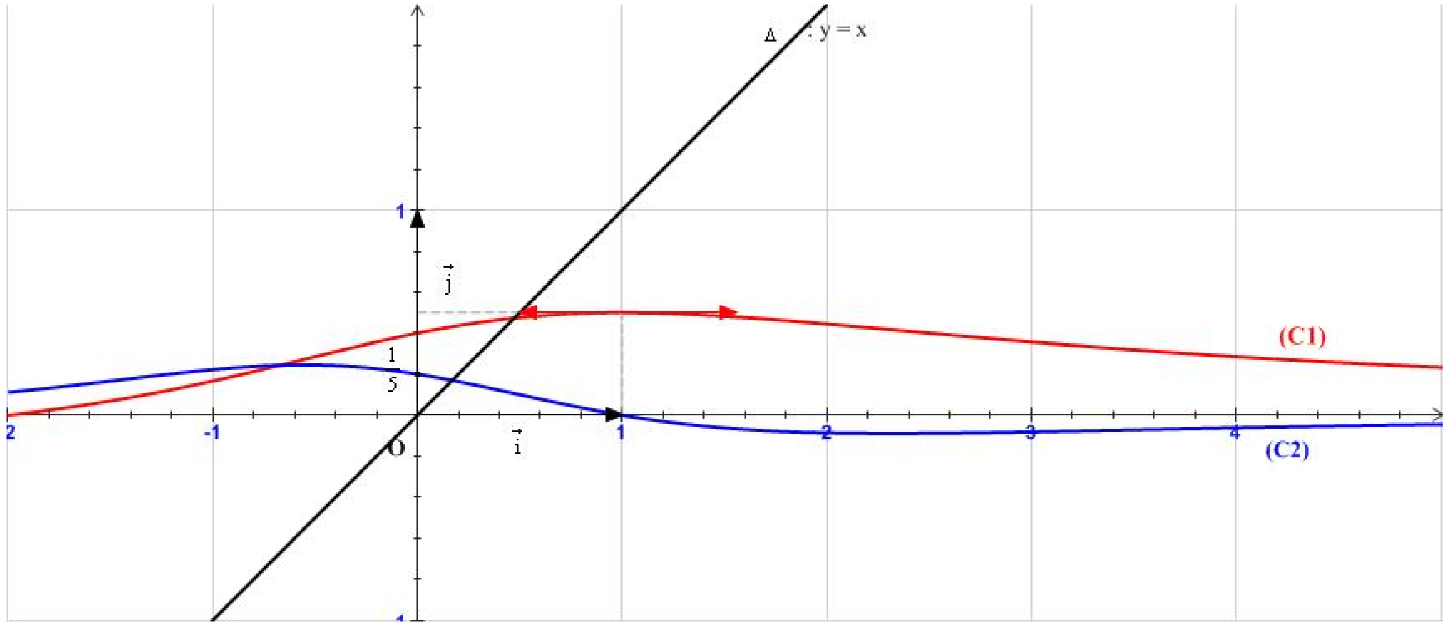
2- Démontrer que la suite (u_n) est décroissante, en déduire qu'elle est convergente et trouver sa limite.

3- a) Démontrer que pour x de $[1,+\infty[$: $0<f'(x)\le\frac{\sqrt{2}}{2}$. (on pourra étudier les variations de f' sur $[1,+\infty[$).

   b) Déduire pour n de $\mathbb{N}$, on a : $-1+u_{n+1}<\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+u_n)$. Retrouver $\lim_{n\to+\infty}(u_n)$.

Exercice n°6 :

Dans la figure ci-desosus, on a représenté deux courbes (C_1) et (C_2) définies et continues sur $[-2,+\infty[$ ayant toutes les deux la droite d'équation y = 0 comme asymptote au voisinage de + ∞.
Les deux courbes sont celles d'une fonction f et sa dérivée f'.



I. Lecture graphique :

En utilisant le graphique, répondre à chacune des questions suivantes :

1) Justifier que (C_1) est la courbe représentative de f .

2) a) Déterminer chacune des limites suivantes : $\lim\limits_{+\infty} f$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2f(x)-1}{2x-2}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2-5f(x)}$

b) Dresser le tableau de variation de f .

3) a) Prouver que l'équation $f(x)=x$ admet sur [0, 1] une solution unique α .

b) Montrer que pour tous réels a et b appartenant à [0, 1], on a : $|f(b)-f(a)|\le\dfrac{1}{5}|b-a|$.

II. Etude d'une suite :

On considère la suite (u_n) définie sur IN par : $u_0\in[0,1]$ et $u_{n+1}=f(u_n)$.

1. Montrer que pour tout n de IN, $0\le u_n\le 1$.

2. Prouver que pour tout n de IN, $|u_{n+1}-\alpha|\le\dfrac{1}{5}|u_n-\alpha|$.

3. Démontrer alors par récurrence que $|u_n-\alpha|\le\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$; puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

4. On pose $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n-1}u_k$

a) Montrer que pour tout n de IN, $n\alpha-\dfrac{5}{4}\left[1-\left(\dfrac{1}{5}\right)^n\right]\le S_n\le n\alpha+\dfrac{5}{4}\left[1-\left(\dfrac{1}{5}\right)^n\right]$

b) Déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{S_n}{n}$.

Exercice n°1 :

$f(x) = \cos\sqrt{x}$, $\forall x \in [0, \pi^2]$.

1. a) Pour tout réel $x \in [0, \pi^2]$, $f(x) = \cos\sqrt{x} = \cos\left(2\frac{\sqrt{x}}{2}\right) = 1-2\sin^2\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) \Rightarrow f(x) - 1 = 2\sin^2\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)$.

   Cos2a = cos²a – sin²a = 2cos²a – 1 = 1 – 2sin²a

   b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\cos\sqrt{x}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} -\frac{1}{2}\times\frac{\sin^2\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2} = -\frac{1}{2}$

   $\Rightarrow$ f est dérivable à droite en 0 et on $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

2. a) f est la composée des fonctions cosinus et racine carrée.

   Soit $U(x) = \sqrt{x}$, $\forall x \in [0, \pi^2]$.
   U est dérivable sur $]0, \pi^2]$
   $U(]0, \pi^2]) =]0, \pi]$
   Cosinus est dérivable sur IR en particulier sur $]0, \pi]$
   $\Rightarrow$ f = cos o U est dérivable sur $]0, \pi^2]$ et ona :

   $f'(x) = U'(x) \times [-\sin(U(x))] = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(-\sin\sqrt{x}\right) = -\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$, $\forall x \in]0, \pi^2]$

   Ainsi $\forall x \in [0, \pi^2]$, $f'(x) = \begin{cases} -\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} & si\ x \in]0,\pi^2] \\ -\frac{1}{2} & si\ x = 0 \end{cases}$

   b) Si $x \in]0, \pi^2]$ alors $0 < \sqrt{x} \le \pi \Rightarrow \sin\sqrt{x} \ge 0 \Rightarrow f'(x) \le 0$ $\forall x \in]0, \pi^2]$.

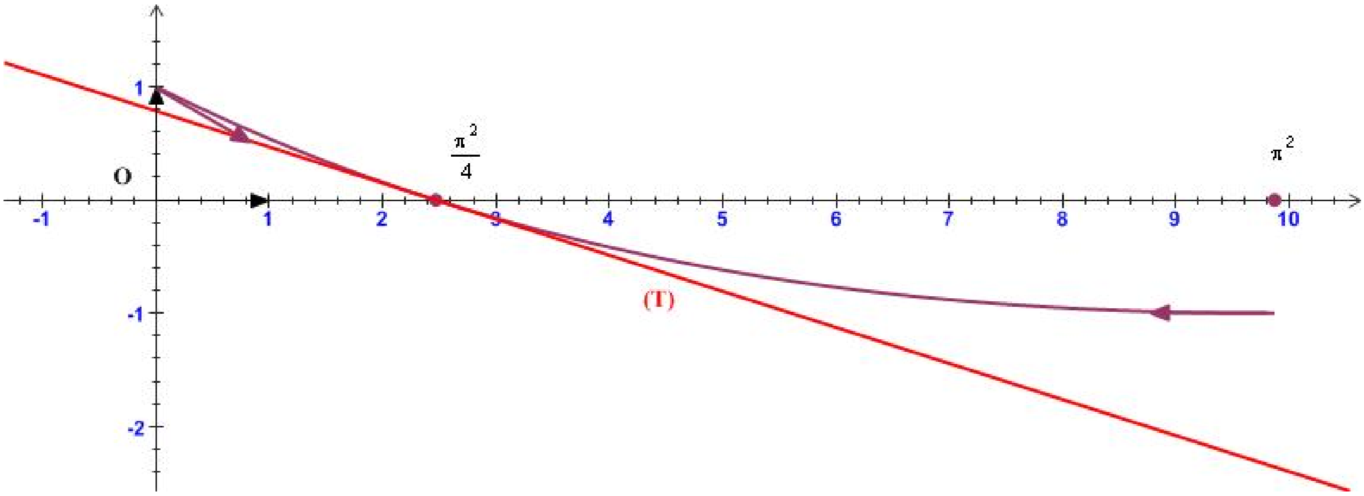
x	0		π^2
$f'(x)$	$-\frac{1}{2}$	$-$	0
$f(x)$	1	$\searrow$	-1

3. a) f(x) = 0 $\Leftrightarrow$ $\cos\sqrt{x} = 0$ et $\sqrt{x} \in [0, \pi] \Leftrightarrow \sqrt{x} = \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi^2}{4}$

b) Soit (T) la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $\dfrac{\pi^2}{4}$

(T) : $y = f'\left(\dfrac{\pi^2}{4}\right)\left(x - \dfrac{\pi^2}{4}\right) + f\left(\dfrac{\pi^2}{4}\right) = -\dfrac{1}{\pi}\left(x - \dfrac{\pi^2}{4}\right) = -\dfrac{1}{\pi}x + \dfrac{\pi}{4}$

Remarque : La courbe de f est donnée ci – dessous n'est pas demandée mais peut nous donner une idée sur le travail qu'on a fait.



Exercice n°4 :

h est une fonction définie sur $\mathbb{R}^*_+$ telle que : $h(1) = 0$ et $h'(x) = \dfrac{1}{x}$

(C'est une fonction qu'on va l'étudier plus tard appelée fonction logarithme népérien)

On pose $F(x) = h\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

1. Domaine de définition de F :

$\forall\, x \in$ IR, $1 + x^2 > x^2 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{1+x^2} > \sqrt{x^2} \Rightarrow \sqrt{1+x^2} > |x| \geq -x \Rightarrow x + \sqrt{1+x^2} > 0$

Puisque h est définie sur $\mathbb{R}^*_+ \Rightarrow F(x) = h\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ est définie sur IR.

Domaine de dérivabilité de F :

$\left(x \overset{U}{\mapsto} 1 + x^2\right)$ est dérivable et strictement positive sur IR $\Rightarrow \sqrt{U}$ est dérivable sur IR

$\Rightarrow \left(x \mapsto x + \sqrt{1+x^2}\right)$ est dérivable sur IR

$$\left.\begin{array}{l} \left(x \overset{V}{\mapsto} x+\sqrt{1+x^2}\right) \text{ est dérivable sur IR} \\ \text{h est dérivable sur } IR_+^* \\ V(IR) \subset IR_+^* \end{array}\right\} \Rightarrow \text{F = h o V est dérivable sur IR.}$$

Calcul de dérivée de F :

F ′ (x) = V ′ (x) × h ′ (V(x)) = $\left(1+\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)\times\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $\forall\, x \in$ IR.

2. Parité de F :

Soit H(x) = F(x) + F(- x), $\forall\, x \in$ IR.
H est dérivable sur IR (n'oublier pas de traiter F(- x) comme composée de deux fonctions dérivables sur IR)
H ′ (x) = F'(x) – F ′ (- x) = 0 car F ′ est paire.
$\Rightarrow$ H est une constante
Or H(0) = 2F(0) = 2h(1) = 0 $\Rightarrow$ H(x) = F(x) + F(- x) = 0, $\forall\, x \in$ IR $\Rightarrow$ F(- x) = - F(x), $\forall\, x \in$ IR.
$\Rightarrow$ F est une function impaire.

3. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$\left.\begin{array}{l} F \text{ est dérivable sur } [0,x] \\ \forall t\in[0,x],\ F'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\le 1 \end{array}\right\}\Rightarrow |F(x)-F(0)|\le|x|$$ (D'après le théorème des accroissements finis)
$\Rightarrow$ |F(x)| ≤ x, $\forall\, x \in \mathbb{R}_+$.
$\Rightarrow$ - x ≤ F(x) ≤ x, $\forall\, x \in \mathbb{R}_+$.
Autrement :

On aurait pu démontrer l'inégalité précédente par une étude de fonction.
On pose G(x) = F(x) – x, $x \in \mathbb{R}_+$

G est dérivable sur IR et on a : G ′ (x) = F ′ (x) – 1 = $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ - 1 < 0

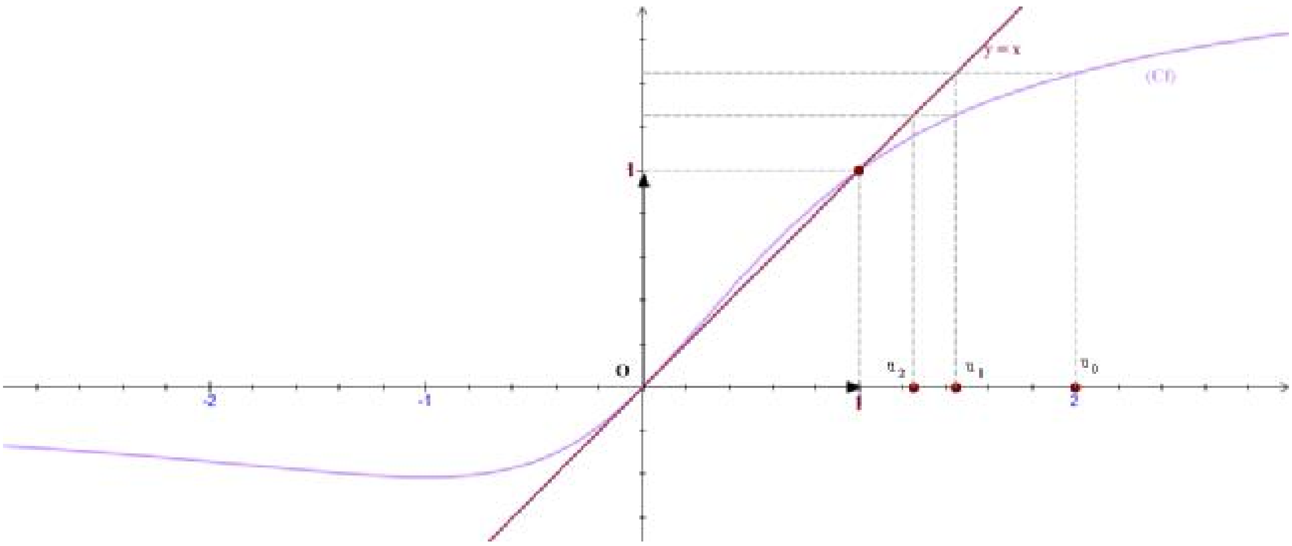
$\Rightarrow$ G est strictement décroissante sur IR
$\Rightarrow$ Si $x \geq 0$ alors G(x) ≤ G(0) $\Rightarrow$ G(x) ≤ 0 $\Rightarrow$ F(x) ≤ x.

Exercice n°5 :

$$f(x)=1+\frac{x-1}{\sqrt{1+x^2}},\ x\in\mathbb{R}$$

Soit (u_n) la suite définie par la donnée de $u_0 > 1$ et par $u_{n+1} = f(u_n), n \in \mathbb{N}$.
L'objectif est d'étudier la convergence de suite.

Essayons tout d'abord de faire une étude graphique pour prendre une idée sur la convergence de la suite.



1. Montrons par récurrence que pour tout n de IN, $u_n > 1$

- Pour n = 0, $u_0 > 1$ (donnée)
- Pour n ≥ 0, supposons que $u_n > 1$ et montrons que $u_{n+1} > 1$

En effet : $u_{n+1} = f(u_n) = 1 + \dfrac{u_n - 1}{\sqrt{1+u_n^2}} \Rightarrow u_{n+1} - 1 = \dfrac{\overbrace{u_n - 1}^{>0}}{\underbrace{\sqrt{1+u_n^2}}_{>0}} > 0 \Rightarrow u_{n+1} > 1$

Ainsi : ∀ n ∈ IN, $u_n > 1$.

2. $u_{n+1} - u_n = 1 + \dfrac{u_n - 1}{\sqrt{1+u_n^2}} - u_n = \underbrace{(u_n - 1)}_{>0}\underbrace{\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+u_n^2}} - 1\right)}_{<0} < 0 \Rightarrow (u_n)$ est décroissante.

(u_n) est décroissante et minorée par 1 donc lle est convergente.
Soit $\ell = \lim\limits_{+\infty} u_n$, on a $\ell \geq 1$.
$u_{n+1} = f(u_n)$, avec *f* continue sur IR en particulier en $\ell \Rightarrow f(\ell) = \ell$
$\Rightarrow 1 + \dfrac{\ell - 1}{\sqrt{1+\ell^2}} = \ell \Rightarrow \dfrac{\ell - 1}{\sqrt{1+\ell^2}} = \ell - 1 \Rightarrow (\ell - 1)\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+\ell^2}} - 1\right) = 0 \Rightarrow \ell = 1$ ou $\sqrt{1+\ell^2} = 1$(c a d ℓ = 0)
Or $\ell \geq 1 \Rightarrow \ell = 1$.

3. <u>Autre procédé de convergence :</u>

a) $f(x) = 1 + \dfrac{x-1}{\sqrt{1+x^2}}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - (x-1)\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{1+x^2-x^2+x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} > 0,\ \forall\, x \geq 1$$

$$f'(x)=\frac{1+x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\Rightarrow f''(x)=\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}\times 2x(1+x^2)^{\frac{1}{2}}(1+x)}{(1+x^2)^3}$$

$$=\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\left[(1+x^2)-3x(1+x)\right]}{(1+x^2)^3}=\frac{-2x^2-3x+1}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$f''(x)=0\Leftrightarrow -2x^2-3x+1=0$

$\Delta=17\Rightarrow x=\frac{3-\sqrt{17}}{-4}=\frac{\sqrt{17}-3}{4}\approx 0.28$ ou $x=\frac{3+\sqrt{17}}{-4}=-\frac{3+\sqrt{17}}{4}\approx -1.7$

$\Rightarrow \forall\, x\geq 1>\frac{\sqrt{17}-3}{4}$, on a : $f''(x)<0\Rightarrow f'$ est décroissante sur $[1,+\infty[$

$\Rightarrow \forall\, x\geq 1$, on a $f'(x)\leq f'(1)\Rightarrow f'(x)\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b)

- $$\left.\begin{array}{l} f \text{ est dérivable sur } [1,+\infty[\\ |f'(x)|=f'(x)\leq\frac{\sqrt{2}}{2} \\ u_n\in[1,+\infty[\end{array}\right\}\Rightarrow |f(u_n)-f(1)|\leq\frac{\sqrt{2}}{2}|u_n-1|$$

(D'après le théorème des accroissements finis)

$|u_{n+1}-1|=u_{n+1}-1\leq\frac{\sqrt{2}}{2}(u_n-1)$

$0<u_{k+1}-1\leq\frac{\sqrt{2}}{2}(u_k-1)$

- $$\left.\begin{array}{l} \text{Pour k = 0, } 0<u_1-1\leq\frac{\sqrt{2}}{2}(u_0-1) \\ \text{Pour k = 1, } 0<u_2-1\leq\frac{\sqrt{2}}{2}(u_1-1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \text{Pour k = n - 1, } 0<u_n-1\leq\frac{\sqrt{2}}{2}(u_{n-1}-1) \end{array}\right\}$$

On fait le produit terme à terme et on simplifie on obtient :

$$0<u_n-1\leq\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n(u_0-1)$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n(u_0-1)=0$ car $\frac{\sqrt{2}}{2}\in\,]-1,1[\,\Rightarrow (u_n)$ converge et elle tend vers 1.