Dérivabilité

Rappels :

Une fonction f définie sur un intervalle ouvert I est dérivable en un réel a$\in$I s'il existe un réel, noté f'(a) tel que $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$.
Soit $f : \mapsto a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ une fonction polynôme. La fonction f est dérivable en tout réel x et $f'(x) = n a_n x^{n-1} + \dots + a_1$.
Si f est dérivable en a alors le réel $f(a) + f'(a)h$ est une approximation affine de $f(a + h)$
Une fonction f définie sur un intervalle ouvert I est dérivable en un a de I, si et seulement si, elle est dérivable à gauche et à droite en a et $f'_g(a) = f'_d(a)$
• Une fonction est dérivable sur un intervalle ouvert I si elle est dérivable en tout réel de I • Soit deux réels a et b tels que a < b. Une fonction est dérivable sur [a,b] si elle est dérivable sur]a,b[, à droite en a et à gauche en b • On définit de façon analogue la dérivabilité d'une fonction sur les intervalles [a,b[,]a,b], a et b finis ou infinis

Dérivées des fonctions usuelles :

Fonction f	Intervalle	f '
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto n x^{n-1}$
$x \mapsto \frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*$	Tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}^*$	$x \mapsto -n x^{-n-1}$
$x \mapsto \sin(ax + b)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto a\cos(ax + b)$
$x \mapsto \cos(ax + b)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -a\sin(ax + b)$
$x \mapsto \tan(ax + b)$	Tout intervalle inclus dans l'ensemble de définition	$x \mapsto a(1 + \tan^2(ax + b))$

Opérations sur les fonctions dérivables :

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I

Fonction	Intervalle	Fonction dérivée
$f+g$	I	$f' + g'$
af (a$\in\mathbb{R}$)	I	af'
$f \times g$	I	$f' \times g + g' \times f$

$\dfrac{1}{f}$	Tout intervalle inclus dans $\{x \in I,\ f(x) \neq 0\}$	$\dfrac{-f'}{f^2}$
$\dfrac{f}{g}$	Tout intervalle inclus dans $\{x \in I,\ g(x) \neq 0\}$	$\dfrac{f'g - g'f}{g^2}$
$f^n, n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$	I	$nf'f^{n-1}$
$\dfrac{1}{f^n}, n \in \mathbb{N}^*$	Tout intervalle inclus dans $\{x \in I,\ f(x) \neq 0\}$	$-nf'f^{-n-1}$

I. Dérivées successives

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. La dérivée f' de f est appelée la dérivée première de f. Si la fonction f'est dérivable sur I, sa fonction dérivée est appelée dérivée seconde de f et notée $f^{(2)}$, ou f''.
Par itération, si la fonction $f^{(n-1)}$ $(n \geqslant 2)$ est dérivable sur I, sa fonction dérivée est appelée dérivée n$^{\text{éme}}$ de f et est notée $f^{(n)}$.
La dérivée n$^{\text{éme}}$ de f est aussi appelée dérivée d'ordre n de f

II. Dérivabilité des fonctions composées

Théorèmes :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant un réel a et g une fonction définie sur un intervalle ouvert J contenant f(a). Si f est dérivable en a et g est dérivable en f(a), alors g°f est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$
Si f est dérivable sur un intervalle I et g est dérivable sur un intervalle J contenant f(I), alors $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g[f(x)]$ pour tout x de I.

III. Théorème des accroissements finis

Théorème de Rolle

Soit a et b deux réels tels que a < b. Soit f une fonction continue sur [a, b] dérivable sur]a,b[et telle que $f(a) = f(b)$, alors il existe un réel c de]a, b [tel que $f'(c) = 0$. Si $\mathscr{C}_f$ est la courbe de f dans un repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$, alors il existe au moins une tangente à $\mathscr{C}_f$ parallèle à la droite des abscisses.

Théorème des accroissements finis

Soit a et b deux réels tels que a < b et f une fonction définie sur [a,b]. • Si f est continue sur [a,b] et dérivable sur]a,b[, alors il existe un réel c de]a,b[tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ • Si $\mathscr{C}_f$ est la courbe de f dans un repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$, alors il existe au moins une tangente à $\mathscr{C}_f$ parallèle à la droite (AB) où A et B sont les points de $\mathscr{C}_f$ d'abscisses respectives a et b.

IV. Inégalité des accroissements finis

Théorème

Soit f une fonction continue sur [a,b] ($a < b$) et dérivable sur]a,b[.
Soit deux réels m et M. Si $m \leqslant f'(x) \leqslant M$ pour tout x de]a,b[, alors
$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$

Corollaire

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $M > 0$.
Si $|f'(x)| \leq M$ pour tout x de I, alors $|f(b) - f(a)| \leq M|b-a|$, pour tous réels a et b de I.

V. Variations d'une fonction

Théorèmes :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si la dérivée de f est strictement positive sur I, alors la fonction f est strictement croissante sur I.
- Si la dérivée de f est strictement négative sur I, alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si f' est positive et ne s'annule sur aucun intervalle ouvert contenu dans I, alors f est strictement croissante sur I
- Si f' est négative et ne s'annule sur aucun intervalle ouvert contenu dans I, alors f est strictement décroissante sur I.

Soit f une fonction continue sur [a,b] et dérivable sur]a,b[.

- Si f est croissante (respectivement strictement croissante) sur]a,b[alors f est croissante (respectivement strictement croissante) sur [a,b]
- Si f est décroissante (respectivement strictement décroissante) sur]a,b[alors f est décroissante (respectivement strictement décroissante) sur [a,b].

VI. Extrema

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- On dit que f admet un maximum local en a, s'il existe un intervalle ouvert J contenant a et inclus dans I tel que pour tout x de J $f(x) \leq f(a)$.
- On dit que f admet un minimum local en a s'il existe un intervalle ouvert J contenant a et inclus dans I tel que pour tout x de J $f(x) \geq f(a)$.

•Lorsque f admet un minimum local ou un maximum local en a on dit que f admet un extremum local en a.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et a∈I. • Si f admet un extremum local en a alors $f'(a) = 0$ • Si $f'(x)$ s'annule en a en changeant de signe alors f admet un extremum local en a.

VII. Point d'inflexion

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et dérivable en un réel a de I et $\mathscr{C}_f$ sa courbe dans un repère orthogonal $(o,\vec{i},\vec{j})$. On dit que le point A(a, f(a)) est un point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$, si $\mathscr{C}_f$ traverse sa tangente en ce point.
le plan est muni d'un repère $(o,\vec{i},\vec{j})$. Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D}$, de courbe représentative $\mathscr{C}$. Soit A(a,b). Le point A est un centre de symétrie de $\mathscr{C}$, si pour tout $x \in \mathscr{D}$, $2a-x \in \mathscr{D}$ et $f(2a-x) = 2b- f(x)$.

Théorème

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $]a-h,a+h[$, $(h > 0)$ et $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé. Si la fonction dérivée f'' de f s'annule en a changeant de signe, alors le point I(a, f(a)) est un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$