EXERCICE N°1

On définit la fonction f de période 1 en donnant sur $[0,1[$ *:* $f(x)=2x^3+bx^2+cx$.

f est elle dérivable sur R ?

EXERCICE N°2

Comparer, sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ *,* $0.9\tan x$ *et* $\tan(0.9x)$

EXERCICE N°3

Montrer que : $\forall p\in\mathbb{N}$*, il existe un réel* $c\in\,]p,p+1[$ *tel que :* $\cos(p+1)=\cos p-\sin c$

EXERCICE N°4

Montrer que :

1°)Pour tout x de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ *, on a :* $\frac{2}{\pi}x\leq\sin x\leq x$

2°) Pour tout x de $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ *, on a :* $x\leq\tan x\leq\frac{4}{\pi}x$

3°) Pour tout x de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ *, on a :* $1-\frac{2}{\pi}x\leq\cos x\leq\frac{\pi}{2}-x$

4°) Pour tout x de $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ *on a :* $\frac{\pi}{2}-2x\leq\cot an(x)-1\leq\frac{\pi}{4}-x$

5°) Pour tout x>0 : $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\leq\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\leq\frac{1}{2\sqrt{x}}$

6°)Montrer que $\frac{\sqrt{2}}{12}\leq\frac{\sqrt{2}-1}{\pi}\leq\frac{\sqrt{3}}{12}$ *indication:* $f:\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]\to R,\ x\mapsto f(x)=\sin(x)$

EXERCICE N°5

Montrer que : pour tout x de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ *, on a :* $2\sin x+\tan x\geq 3x$

EXERCICE N°6

Soit a>0. Pour tout n de N :*

On considère la fonction polynomiale P_n *définie par la relation:* $P_n(x)=\sum_{k=1}^{n}x^k-a$.

1°) a)ntrer que l'équation $P_n(x)=0$ *admet une solution positive et une seule, que l'on notera* x_n.

b) Montrer que $x_n<a$.

2°) Etudier le signe de $P_{n+1}(x_n)$. *En déduire que la suite* $(x_n)_{n1}$ *est monotone.*

3°) Montrer que la suite $(x_n)_{n\mu 1}$ *est convergente. On note* ℓ *sa limite.*

Prouver que $0\leq\ell\leq 1$.

4°) a) Montrer que pour tout nombre entier naturel non nul n le nombre x_n *est solution de l'équation:*

$x^{n+1}-(a+1)x+a=0$

b)En déduire que: $\ell=a/(a+1)$.

EXERCICE N°7

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on définit la fonction f_n *par :*

$\forall x\in R^+ : f_n(x)=x^n+9x^2-4$.

1) a)Montrer que l'équation $f_n(x)=0$ *n'a qu'une seule solution strictement positive, notée* u_n.

b)Calculer u_1 *et* u_2.

c)Vérifier que : $\forall n \in N^*$ $u_n \in \left]0, \frac{2}{3}\right[$

2) a) Montrer que, pour tout x élément de] 0, 1 [, on a : $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.

b)En déduire le signe de $f_n(u_{n+1})$, puis les variations de la suite (u_n).

c)Montrer que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

3) a)Déterminer la limite de $(u_n)^n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

b)Donner enfin la valeur de ℓ.

EXERCICE N°8

Soit f une fonction infiniment dérivable sur R(ie : $\forall n \in N^*$, f est n fois dérivable sur R)
Telle que $\forall n \in N^*$, $\exists (a_n, b_n) \in R^2$ / $\forall x \in R$, on a $f^{(n)}(x) = a_n f(x + b_n)$.
1°)Montrer que $(a_n)_{n\in N^*}$ est une suite géométrique et $(b_n)_{n\in N^*}$ est une suite arithmétique.
2°)Calculer a_n et b_n en fonction de n, a_1 et b_1.
3°)Trouver un exemple de fonction f vérifiant les hypothèses ci-dessus.

EXERCICE N°9

Soient f et g deux fonctions continues sur un fermé $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$, telles que : $f(a) = g(b)$ et $f(b) = g(a)$. $(a < b)$
1°)Montrer que qu'il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que : $f(x_0) = g(x_0)$.
2°) Montrer que qu'il existe $x_1 \in]a,b[$ tel que : $f'(x_1) = -g'(x_1)$.

EXERCICE N°10

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$, $(a < b)$.
On suppose que $\forall x \in]a,b[$: $g'(x) \neq 0$.
1°)Montrer que l'on a : $g(a) \neq g(b)$.
2°)Soit la fonction h définie sur $[a,b]$ par : $h(x) = f(x) - f(a) - \omega(g(x) - g(a))$ où $\omega \in R$
Calculer ω pour que l'on ait $h(b) = 0$.

3°)La valeur de ω étant celle de 2°), prouver que : $\exists c \in]a,b[$ / $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$

4°)En déduire que : Si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$ alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \ell$.

5°)Appliquer le résultat pour calculer : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^3}$

EXERCICE N°11

Soit f une fonction deux fois dérivable sur R.
1°)Montrer que : si f est paire alors $\exists a \in R$ / $f'(a) = 0$
2°)Montrer que : si f est impaire alors $\exists b \in R$ / $f''(b) = 0$.

EXERCICE N°12

On donne un réel t>0. Soit la fonction $f_n : x \mapsto x^n - t(1 - x)$
1°)Prouver que, pour tout entier naturel n non nul, l'équation : $f_n(x) = 0$ admet une solution et une seule comprise entre 0 et 1. Soit u_n cette racine.
2°)Montrer que , pour tout n de N* : $f_{n+1}(u_n) = -t(1 - u_n)^2$
3°)En déduire que (u_n) est croissante.
4°)En déduire que (u_n) est convergente <u>et calculer sa limite</u>.