1- Calcul de limites

1. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} 2x-\sqrt{4x^2-x+1} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-3x+7}+2x$$

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x+1}+3x \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-x+1}+x-1$$

$$\lim_{x\to0} \frac{1-\sqrt{x+1}}{x} \; ; \; \lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-3x+2} \; ; \; \lim_{x\to0} \frac{\sin x}{\sqrt{x+4}-2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+4}}{x+1+\sqrt{x^2+x+1}} \; ; \; \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(\frac{\pi}{4}-x)-\tan(x)}{1-\sin(\frac{\pi}{4}+x)}$$

2. La fonction suivante est définie sur $\mathbb{R}$ par :

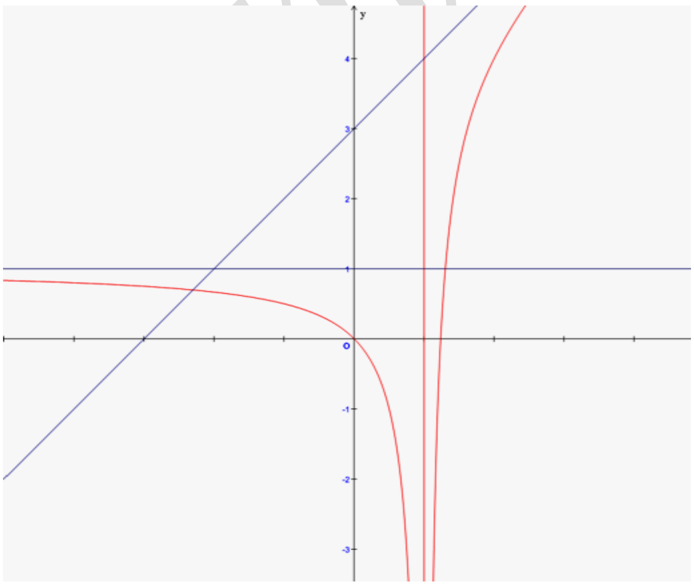
$$f(x)=\frac{1}{2-\cos(x)}$$

1° Montrer que pour tout x on a : $\frac{1}{3}\le f(x)\le 1$

2°En déduire les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2-\cos(x)} \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{x+\cos(x)}{2-\cos(x)}$$

3. La représentation graphique suivante est celle de la fonction f(x).



1° Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \; ; \; \lim_{x\to+\infty} f(x) \; , \; \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \; , \; \lim_{x\to+\infty} f(x)-x$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) \; ; \lim_{x\to1^+} f(x)$$

2° Déterminer le nombre de solutions de l'équation f(x)=0

3° Dresser le tableau de variations de f(x).

4° Dresser le tableau de signe de f(x).

4 . La fonction suivante est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\left(-\frac{1}{2}+\frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)\pi$$

1° Montrer que pour tout réel x on a :

$$-1<-\frac{1}{2}+\frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}<0$$

2° Soit la fonction : $g(x)=\dfrac{1}{\tan[f(x)]}$

a- Monter que g(x) est définie sur $\mathbb{R}$..

b- Déterminer : $\lim_{x\to-\infty} g(x)$; $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

2- Continuité

1.

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{x^2+x+1}+2x & si\ x\le 0 \\ \dfrac{x^3-5x+4}{4(1-x)} & si\ x\in\,]0,1[\\ \dfrac{x+\cos(\pi x)}{2-\cos(\pi x)} & si\ x\ge 1 \end{cases}$$

1° a – Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

b- Montrer que pour tout x >1 on a : $\frac{x-1}{3}\le f(x)$

et en déduire $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2° Etudier la continuité de f en 0 et en 1 .

$\boxed{2.}$ *Soit la fonction numérique suivante :*

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{-3-x}+\dfrac{9}{2}x & si\ x\leq -3\\ \dfrac{x^2+2x-3}{9-x^2} & si\ -3<x<1\\ ax^2+bx+c & si\ x\geq 1\end{cases}$$

On désigne par ζ la courbe représentative de f(x).

1° Déterminer le domaine de définition de f(x).

2° Déterminer les réels a et b pour que ζ passe par le point A(1,3) et B(2,7)

3° On pose a=b=1

a- déterminer l'expression de f(x).

b- Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

c- Etudier la continuité de f en 3 et en 1.

$\boxed{3.}$

$$f(x)=\begin{cases}-(m+1)x^2+x & si\ x>1\\ \dfrac{2-x}{x+1} & si\ 0<x\leq 1\\ \dfrac{2+\sin(\pi x)}{(x+1)(2-\cos(\pi x))} & si\ x\leq 0\ et\ x\neq 1\end{cases}$$

1- calculer la limite en -1

2- déterminer selon les valeurs de m la limite éventuelle de f en +∞.

3- Montrer que pour tout réel x on a :

$$\frac{1}{3}\leq\frac{2+\sin(\pi x)}{2-\cos(\pi x)}\leq 3$$

4- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

5- Monter que f est continue en 0

6- Pour quelle valeur de m f est continue en 1 ?

$\boxed{4.}$

$g(x)=8x^3-6x+1$

1° Montrer que l'équation g(x)=x admet sur $\mathbb{R}$ *une Solution unique* α *et que* $\alpha\in\left]\frac{3}{2},2\right[$.

2° Soit $f(x)=2x^4-2x^2-x-1$

a- Montrer que : $f(\alpha)=\dfrac{3}{2}\alpha-\left(\alpha-\dfrac{1}{2}\right)-1$

b- En déduire que l'équation f(x)=0 admet deux solutions x_1 *et* x_2 *tel que :* $x_1<\alpha<x_2$.

$\boxed{5.}$

Soit $f(x)=\left(\dfrac{-1}{2}+\dfrac{x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)\pi$

1° Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$ *on a :*

$$-1<\frac{-1}{2}+\frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}<0$$

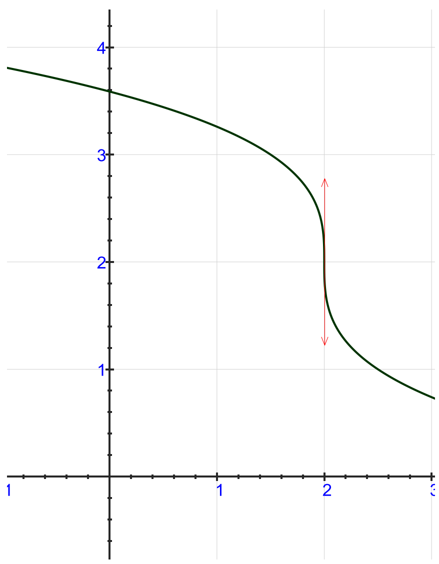
2° Soit $g(x)=\dfrac{1}{\tan(f(x))}$, $x\in\mathbb{R}$

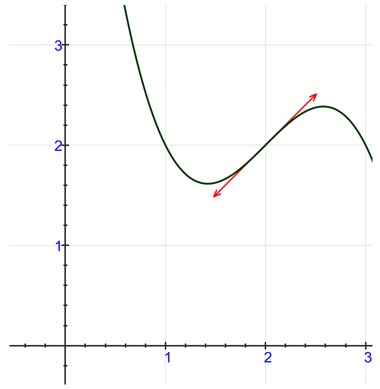
a- Etudier la continuité de g sur $\mathbb{R}$.

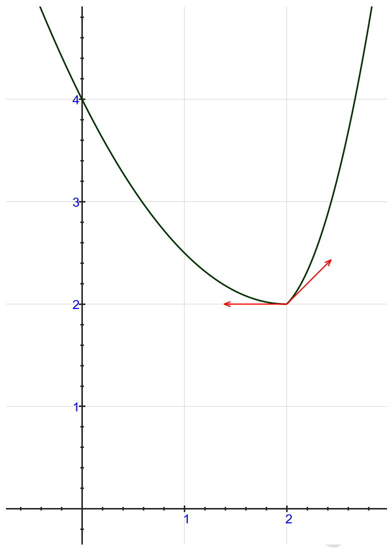
b- Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

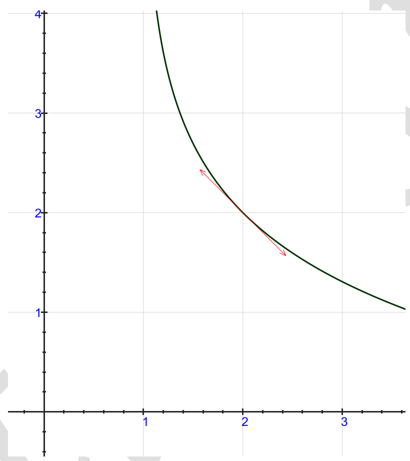
3- Dérivabilité

$\boxed{1.}$ *Dans chacun des cas suivants, la courbe* $\mathscr{C}$ *est la courbe représentative d'une fonction f définie sur [-1,3].*









La fonction f est elle dérivable en $x_0=2$?Justifier

2. Soit f la fonction définie sue $[0,1[$ par :

$f(x)=\sqrt{\dfrac{x^3}{1-x}}$ et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1- Calculer $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

2- Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0,1[$

3° Etudier la dérivabilité de f en 0 .

4° Dresser le tableau de variations de f .

5° Donner une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$.

3. Soit f : $]-1,2[\to \mathbb{R}$.

$$x \mapsto \begin{cases} f(x)=\dfrac{3x-1}{x+1} & si\ x\in]-1,1] \\ f(x)=tan\left(\dfrac{\pi}{4}x\right) & si\ x\in]1,2[\end{cases}$$

1° Etudier la continuité de f sur $]-1,1[$.

2° Etudier la dérivabilité de f en 1.

3° Déterminer les intervalles sur lesquels f est dérivable et déterminer $f'(x)$.

4°Interpréter graphiquement la dérivabilité de f en 1.

4. Soit f la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par :

$f(x)=x\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$

Soit g définie sur $[0,\pi]$ par : $g(x)=\sin(x)-x\cos(x)$.

1° Calculer $f(2)$ et $f(4)$.

2° Etudier les variations de g sur $[0,\pi]$, et en déduire le signe de $g(x)$.

3° Justifier la dérivabilité de f sur $[1,+\infty[$ et écrire $f'(x)$ en fonction de $g(x)$.

4° préciser l'image de $[1,+\infty[$ par f .