Série : Limites & Continuité

Exercice n°1

Calculer les limites suivantes :

$a-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^3-x^2+1}{2x^3-x+3}$ b- $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+8}-3}{\sqrt{3x+1}-2}$ c- $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x-\sqrt{11x+3}}{\sqrt{x+6}-3}$ d- $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2+|x|}{x^2-|x|}$

$e-\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}$ f- $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin(x)}{\cos^2(x)}$ g- $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2-2x+1}-\sqrt{x^2-1}$ h- $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x+1}+x$

i- $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+2x+3}-2x+1$ j- $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-1}$ k- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{\sin(x)}$ m- $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+x^2+4}{2x^2+x-6}$

n- $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos(\frac{\pi}{4}-x)-tg(x)}{1-\sin(\frac{\pi}{4}+x)}$ O- $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+4}+\sqrt{x+9}-6}{x}$ p- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x+4}}{x+1+\sqrt{2x^2+x+1}}$

Exercice n°2

Soit $f(x)=\begin{cases} x^4+a^2-2a-4 & si\ x<1 \\ 3x^2-2x-4 & si\ 1\le x\le 2 \quad où\ (a,b)\in\mathbb{R}^2 \\ 3x+\sqrt{x^2-4}-b^2 & si\ x>2 \end{cases}$

1- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

2 – Déterminer a et b pour que f(x) soit continue en 1 et 2

3- Déterminer le domaine de continuité de f(x)

Exercice n°3

soient f(x) et g(x) deux fonctions définies par:

$f(x)=\dfrac{x+\cos(x)}{x^2+1}$ et $g(x)=2x-\sin(x)$

1- montrer que $\forall\ x\in\mathbb{R}\ \dfrac{x-1}{x^2+1}\le f(x)\le\dfrac{x+1}{x^2+1}$

2 – en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

3 – montrer que $\forall\ x\in\mathbb{R}\ g(x)\ge 2x-1$ et $g(x)\le 2x+1$, en deduire $\lim\limits_{+\infty}g$ et $\lim\limits_{-\infty}g$

Exercice n°4

soit $f(x)=\begin{cases} \sqrt{3x^2+|x|}-|x| & si\ x\in\left]-\infty,-1\right]\cup\left[1,+\infty\right[\\ \dfrac{x^2+|x|}{x^2-|x|} & si\ x\in\left]-1,1\right[\setminus\{0\} \\ f(0)=-1 & \end{cases}$

1- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)+(\sqrt{3}-1)x$

2 – Etudier la continuité de f en 0 et en -1

3- Calculer $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-1}{x-1}$

Exercice n°5

Soit $f(x)=\begin{cases} -(m+1)x^2+x & si\ x>1 \\ \dfrac{2-x}{x+1} & si\ 0<x\leq 1 \\ \dfrac{2+\sin(\pi x)}{(x+1)(2-\cos(\pi x))} & si\ x\leq 0\ \ et\ x\neq -1 \end{cases}$ où $m\in\mathbb{R}$

1- Calculer la limite éventuelle de f en -1

2- Déterminer selon les valeurs de m , la limite éventuelle de f en $+\infty$

3- Montrer que pour tout réel x , $\dfrac{1}{3}\leq\dfrac{2+\sin\pi x}{2-\cos\pi x}\leq 3$

4- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

5- Montrer que f est continue en 0

6- Pour quelle valeur de m, f est elle continue en 1?

Exercice n°6

Soit $g(x)=8x^3+6x-1$

$1-$ Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α et que $\alpha\in\left]\dfrac{3}{2},2\right[$

Soit $f(x)=2x^4+3x^2-x-1$

$2-$ Montrer que $f(\alpha)=\dfrac{3}{2}\alpha(\alpha-\dfrac{1}{2})-1$

$3-$ en déduire que $f(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$ deux solutions x_1 et x_2 tels que $x_1<\alpha<x_2$.

Exercice n°7

Soit $g(x)=2+\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+4}}$

$1-$Montrer que $g(x)=x$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et que $\alpha>2$

2- $\varphi(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{g(tgx)} & si\ x\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[\\ \varphi(\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{1}{2} & \end{cases}$

a- Etudier la continuité de φ en $\dfrac{\pi}{2}$

b- Montrer que $\varphi(x)=\dfrac{1}{1+\sin x}$ $\forall x\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$

Exercice n°8

Soit $f(x)=\left(\dfrac{-1}{2}+\dfrac{x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)\pi$

$1-$ Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}$, $-1<\dfrac{-1}{2}+\dfrac{x}{2\sqrt{x^2+1}}<0$

$2-$ Soit $g(x)=cotg[f(x)]$

a- Etudier la continuité de g sur $\mathbb{R}$.

b- déterminer: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

DOCUMENT TERMINE