QCM1

Dire si les propriétés sont vraies, fausses ou si l'on ne peut rien dire (on justifiera ses dires).

1. Une suite (u_n) vérifie pour tout $n > 100$ l'inégalité $|u_n - 1| \leq \frac{n}{n^2+1}$.

   a. (u_n) est bornée. b. (u_n) tend vers 1 c. (u_n) est croissante

2. Une suite (v_n) qui vérifie pour tout n $\frac{v_{n+1}}{v_n} < 1$ est strictement décroissante.

3. La suite (w_n) définie par $w_n = \frac{1+(-1)^n \sin n}{n+1}$ vérifie $|w_n| \leq \frac{2}{n+1}$. Elle est :

   a. décroissante, b. bornée, c. convergente.

4. Toute suite convergente est bornée.

5. Toute suite non majorée tend vers $+\infty$.

QCM 2

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies sur IN.

Affirmation. a.	Si (u_n) est monotone décroissante et minorée et (v_n) est monotone croissante et majorée alors (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.
Affirmation. b.	Si on a $a^n < u_{n+1} - u_n < b^n$ avec a et b dans l'intervalle $]0\,;1[$ alors u_n converge.
Affirmation. c.	Si (u_n) converge, alors la suite $(\ln|u_n|)$ converge.

Exercice n°1

Soit la suite u définie par $u_0 = 0, u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n}$.

a. Calculer u_1, u_2, u_3. On exprimera chacun des termes sous forme d'une fraction irréductible.

b. Comparer les quatre premiers termes de la suite u aux quatre premiers termes de la suite w définie par $w_n = \frac{n}{n+1}$.

c. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = w_n$.

2. Soit v la suite définie par $v_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$.

a. Monter que $v_1 + v_2 + v_3 = -\ln 4$.

b. Soit S_n la somme définie pour tout entier n non nul par $S_n = v_1 + v_2 + ... + v_n$. Exprimer S_n en fonction de n. Déterminer la limite de S_n lorsque n tend vers l'infini.

Exercice n°2 On considère la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $\begin{cases} u_1 = 1/3 \\ u_{n+1} = \frac{n+1}{3n} u_n \end{cases}$. On pose,

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{u_n}{n}$

1) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

2) Exprimer v_n en fonction de n.

3) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

4) Soit la série $S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$. Calculer S_n en fonction de n et montrer que la suite S_n est convergente.

Exercice n°3

On considère la suite u sur IN* définie par $\begin{cases} u_1 = 1 \\ (u_{n+1})^2 = 4u_n \end{cases}$.

1. Calculer u_2, u_3, u_4, u_5. Donner les résultats sous la forme 2^{α}.
2. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = \ln(u_n) - \ln 4$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.
3. Exprimer v_n en fonction de n. En déduire u_n et calculer $\lim_{n\to\infty} u_n$.
4. Pour quelles valeurs de n a-t-on $u_n > 3{,}96$?

Exercice n°4

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par : $u_n = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{p^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$,

et la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par : $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.

Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice n°5

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{4} \end{cases}$, et $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{3v_n + 1}{4} \end{cases}$ pour tout entier naturel n.

Dans un repère orthonormé$(O\,;\vec{i}, \vec{j})$, tracer les droites (D) et (Δ) d'équations respectives $y = \frac{3x+1}{4}$ et $y = x$.

1. En utilisant ces deux droites, placer sur l'axe des abscisses les réels u_1, u_2, u_3 puis v_1, v_2 et v_3.
2. Calculer u_1, u_2, u_3 puis v_1, v_2 et v_3.
3. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et donner leur limite.

Exercice n°6

On considère les deux suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ définies par : $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$.

1. Etude des suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$

a. Calculer $u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3$.

b. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante.

c. Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est décroissante. Est-elle strictement décroissante ? L'est-elle à partir d'un certain rang ?

d. Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes.

Exercice n°7

1. Démontrer que pour tout n de IN * et tout x de [0 ; 1] : $\frac{1}{n}-\frac{x}{n^2}\leq\frac{1}{x+n}\leq\frac{1}{n}$.

2. a. Calculer $\int_0^1 \frac{1}{x+n}dx$.

b. Déduire en utilisant 1., que : pour $n\epsilon IN*$, $\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}\leq\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ puis que $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\leq\frac{1}{n}$.

3. On appelle U la suite définie pour n de IN * par : $U(n)=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}-\ln(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\ln(n)$.

Démontrer que U est décroissante (on pourra utiliser 2. b.)

4. On désigne par V la suite de terme général : $V(n)=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}-\ln(n+1)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\ln(n+1)$.

Démontrer que V est croissant.

5. Démontrer que U et V convergent vers une limite commune.

Exercice n°8

On considère les deux suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ définies par :

$u_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}$ et $v_n=u_n+\frac{1}{n!}$.

1. Etude des suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$

a. Calculer $u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3$.

b. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante.

c. Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est décroissante. Est-elle strictement décroissante ? L'est-elle à partir d'un certain rang ?

d. Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes.

Exercice n°9

I. Première partie

On appelle f et g les deux fonctions définies sur l'intervalle [0 ; $+\infty$ [par

$f(x)=\ln(1+x)-x$ et $g(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}$.

1. Étudier les variations de f et de g sur [0 ; $+\infty$ [.

2. En déduire que pour tout $x\geq 0$, $x-\frac{x^2}{2}\leq\ln(1+x)\leq x$.

II. Deuxième partie

On se propose d'étudier la suite (u_n) de nombres réels définie par : $u_1=\frac{3}{2}$ et $u_{n+1}=u_n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$

.

1. Montrer par récurrence que $u_n > 0$ pour tout entier naturel $n\geq 1$.

2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n\geq 1$:

$\ln u_n=\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+...+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$.

3. On pose $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}$ et $T_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{4^n}$

À l'aide de la première partie, montrer que : $S_n - \frac{1}{2} T_n \leq \ln u_n \leq S_n$.

4. Calculer S_n et T_n en fonction de n. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n$.

5. Étude de la convergence de la suite (u_n).

a. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

b. En déduire que (u_n) est convergente. Soit l sa limite.

c. On admet le résultat suivant : si deux suites (v_n) et (w_n) sont convergentes et telles que $v_n \leq w_n$ pour tout n entier naturel, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n \leq \lim\limits_{n \to +\infty} w_n$.

Montrer alors que $\frac{5}{6} \leq \ln l \leq 1$ et en déduire, un encadrement de l.