Premier Exercice :

On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_1 = 1 \\ U_{n+1} = 7U_n + 8U_{n-1} \forall n \geq 1 \end{cases}$$

1) Montrer que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $s_n = U_{n+1} + U_n$ est une suite géométrique dont on précisera la raison. En déduire sa forme générale en fonction de n
2) On pose $V_n = (-1)^n U_n$ et on considère la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $t_n = V_{n+1} - V_n$.
   Exprimer t_n en fonction de s_n
3)
   a) Calculer de deux manière la somme

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} t_k$$

   b) Exprimer V_n, puis U_n , en fonction de n

c) Déterminer alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{U_n}{8^n}\right)$$

Deuxième Exercice :

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 1 et la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} V_0 = \dfrac{3}{2} \\ V_{n+1} = 2V_n + U_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Et soit la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$W_n = \frac{V_n}{U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1)
   a) Montrer que (W_n) est une suite arithmétique, calculer son terme en fonction de n
   b) Calculer U_n en fonction de n
2) En déduire l'expression de V_n en fonction de n

 e-mail : r_wajdi07@yahoo.fr

Troisième Exercice :

Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{U^2{}_n + 2} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n > 0$
2) Etudier la monotonie de la suite (U_n)
3) On pose $V_n = {U_n}^2$
   a) Montrer que (V_n)est une suite arithmétique
   b) Calculer (V_n) puis (U_n) en fonction de n
4) En déduire que (U_n) est convergente et donner sa limite

Quatrième Exercice :

Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{4 + U_n} - 2 \ \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Montrer que : $U_n > 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$
2) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$: $U_n - U_{n+1}$ à le même signe que U_n
3) Etablir que(U_n) est monotone. Que peut-on déduire ?
4) Calculer $\lim_{n\to+\infty} U_n$

Cinquième Exercice :

Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$définie par : $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = {U_n}^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$
2)
   a) Etudier la monotonie de la suite (U_n)
   b) Montrer que (U_n) est convergente et calculer sa limite.
3) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{(2^n)}$.
4) On pose

$$p_n = \prod_{k=0}^{n} U_k$$

Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$p_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{(2^{n+1}-1)}$$

Sixième Exercice :

Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$définie par : $\begin{cases} U_0 = a \in \mathbb{R} \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}\ U_n + 5 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Calculer U_1et U_2 en fonction de a.
2) On pose $\forall n \in \mathbb{N}$ $V_n = U_n - \alpha$
   a) Trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que (V_n) soit une suite géométrique. Pour la suite de l'exercice, on prendra cette valeur.
   b) Calculer (V_n) puis (U_n) en fonction de n
3) Etudier la convergence de chacune des suites (V_n) puis (U_n).
4) Calculer en fonction de n

$$\begin{cases} S_n = \sum_{k=0}^{n} V_k \\ T_n = \sum_{k=0}^{n} U_k \end{cases}$$

Septième Exercice :

Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$définie par :

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} \ ; \ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

1) Calculer U_1 ; U_2 et U_3
2)
   a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)}$$

b) En déduire la monotonie de (U_n).

3)

a) Montrer que $\forall k \in [1, n]$on a :

$$\frac{1}{2n} \leq \frac{1}{k+n} \leq \frac{1}{1+n}$$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{2} \leq U_n \leq \frac{n}{1+n}$$

4)

a) Montrer que la suite (U_n) est majorée.

b) En déduire que (U_n) est convergente et calculer sa limite.

BON TRAVAIL