Lycée Majida Boulila Sfax — Série n °4 — M JARRAYA MAHER
2010-2011 — 4 Sciences

Exercice n°1

A tout nombre complexe z distinct de (i), on associe $z' = \dfrac{iz+1}{z+i}$

1. a) Ecrire z' sous forme cartésienne lorsque z =2

   b) Soit : $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Ecrire $ie^{i\theta}+1$ et $e^{i\theta}+i$ sous forme exponentielle.

   c) Déterminer la forme exponentielle de z' lorsque $z = e^{i\theta}$

2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$,

On donne les points A, B et C d'affixes respectives :i,-i et 2.
à tout point M(z) distinct de B on associe le point M'(z').

   a) Déterminer l'ensemble E des points M(z) tel que z' soit imaginaire pur

   b) Déterminer l'ensemble F des points M(z) tel que $|z'|=1$

   c) Montrer que : $\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM'}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2} + \left(\widehat{\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}}\right)[2\pi]$

En déduire que : si z' est réel alors M appartient à un cercle que l'on précisera.

3. a) Montrer que le triangle ABC est isocèle.

   b) Déterminer l'affixe du point D pour que ACBD soit un losange.

Exercice n°2

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$. On note A et B les points d'affixes respectives i et $i\sqrt{3}$.

Soit $f : P\setminus\{A\} \to P; M(z) \to M'(z') telque \quad z' = \dfrac{z-i}{z-i\sqrt{3}}$

1. Dans cette question, on prend z = 1 et z' le complexe qui lui correspond.

a) Donner la forme algébrique de z'.

b) Donner la forme trigonométrique de z'.

c) Déduire les valeurs de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$

2 .Soit l'ensemble E des points M(z) tel que $\left|\dfrac{z-i}{z-i\sqrt{3}}\right| = 1$; Prouver que E est la médiatrice de [AB].

3. a) Montrer que $\forall z \in X\setminus\{i; i\sqrt{3}\}$ on a $\arg(z') \equiv \left(\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MA}\right)[2\pi]$ avec M le point d'affixe z.

b) Soit F= {M(z) tel que z' est un réel non nul}

A l'aide de 3)a); montrer que F est la droite (AB) privée de A et B.

Exercice n°3

Soit $\theta \in [0,\pi]$ on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) $\quad z^2 - 2(\cos\theta)z + 2(1-\sin\theta) = 0$

1. a)Vérifier que $\cos^2(\theta) - 2(1-\sin\theta) = -(1-\sin\theta)^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation E

2. Le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé$\left(0,\vec{U},\vec{V}\right)$, Soient A, M et M' les points d'affixes $\sqrt{3}$, $\cos\theta$+i(1-sinθ) et $\cos\theta$-i(1-sinθ)

3. Déterminer et construire F l'ensemble des points M lorsque θ décrit $[0,\pi]$

a) Montrer que $AM^2 = 5 - 4\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$

b) Déterminer θ pour la quelle AM est minimale.