Rappel : limites & continuité

1 Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4} \qquad \lim_{x\to -2}\frac{x^3-3x\quad 2}{x^2-\ 4} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2+x-1}{x-1} \qquad \lim_{x\to\frac{p}{4}}\frac{\sin x-\sin\frac{p}{4}}{\cos x-\cos\frac{p}{4}}$$

2 1. Soit f la fonction définie sur IR\{1} par $f(x)=\dfrac{x^2-1}{|x-1|}$

a) Tracer dans une repère du plan la courbe (C) représentative de f.

Vérifier par lecture graphique que f n'dmet pas de limite en 1.

b) Calculer les limites droites et à gauche en 1.

2. Même question pour la fonction g définie sur IR\{1} par $f(x)=\dfrac{|x(x-1)|}{x-1}$

3 1. Soit f la fonction définie par $f(x)=x-\dfrac{1}{x^2}$. On désigne par C_f la coure représentative de f dans un repère du plan. Déterminer les asymptotes à C_f .

2. Même question pour la fonction f Soit f la fonction définie par $f(x)=\sqrt{x^2-1}$

4 1. Peut - on prolonger par continuité en 0 la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{x}{x^2-x}$?

2. Peut - on prolonger par continuité en 1 et en (-1) la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{1-|x|}$?

1

$$\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}=\frac{\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)\left(x-1\right)}=\frac{1}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(x-1\right)}$$

donc $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(x-1\right)}=\dfrac{1}{12}$

$\dfrac{x^3-3x+2}{x^2-4}=\dfrac{(x+2)(x^2-2x+1)}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{(x-1)^2}{x-2}$ donc $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3-3x+2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x-1)^2}{x-2}=-\dfrac{9}{4}$

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\frac{x}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\frac{1}{\left(\sqrt{1+x}+1\right)}$$

donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\dfrac{1}{2}$

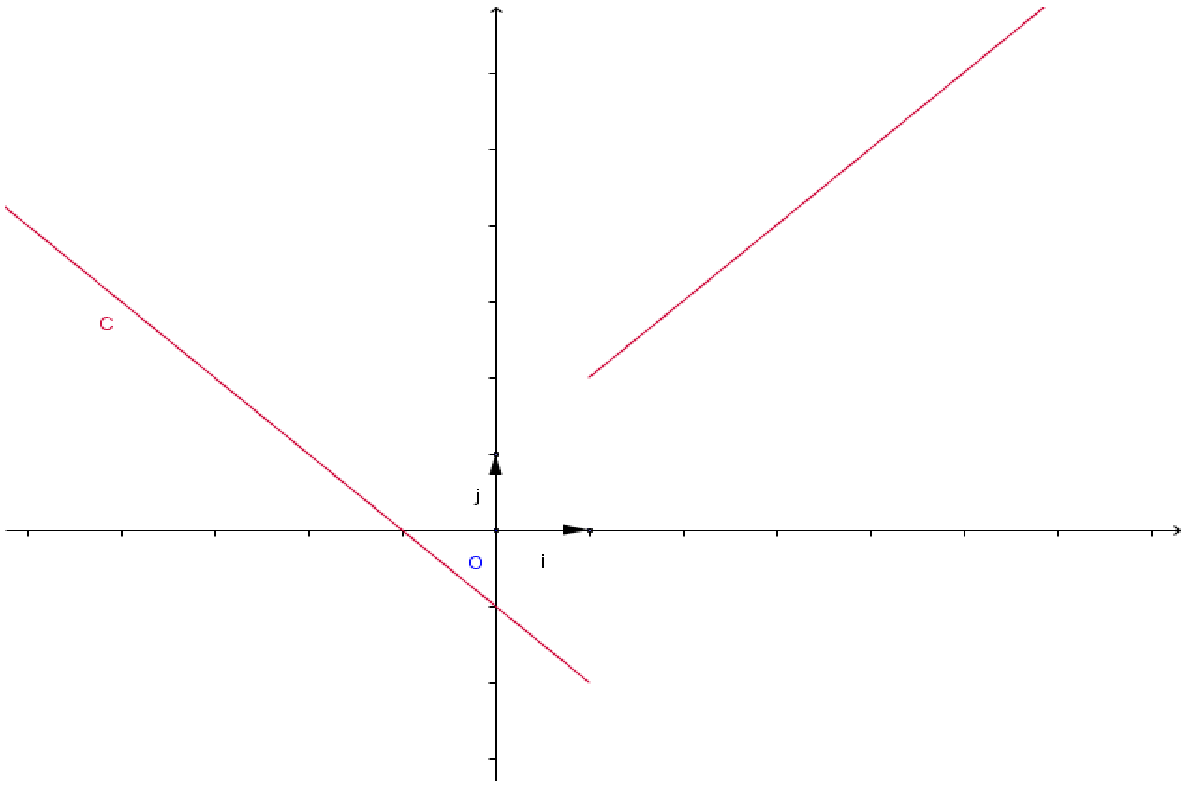
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}x^2+1=2$$

$$\lim_{x\to\frac{p}{4}}\frac{\sin x-\sin\frac{p}{4}}{\cos x-\cos\frac{p}{4}}=\lim_{x\to\frac{p}{4}}\frac{\dfrac{\sin x-\sin\frac{p}{4}}{x-\frac{p}{4}}}{\dfrac{\cos x-\cos\frac{p}{4}}{x-\frac{p}{4}}}=\frac{\sin'\left(\frac{p}{4}\right)}{\cos'\left(\frac{p}{4}\right)}=\frac{\cos\left(\frac{p}{4}\right)}{-\sin\left(\frac{p}{4}\right)}=-1$$

2

1. a) La courbe (C) de f présente un saut en 1 donc la fonction n'admet pas de limite en 1.

Voir figure page 3.



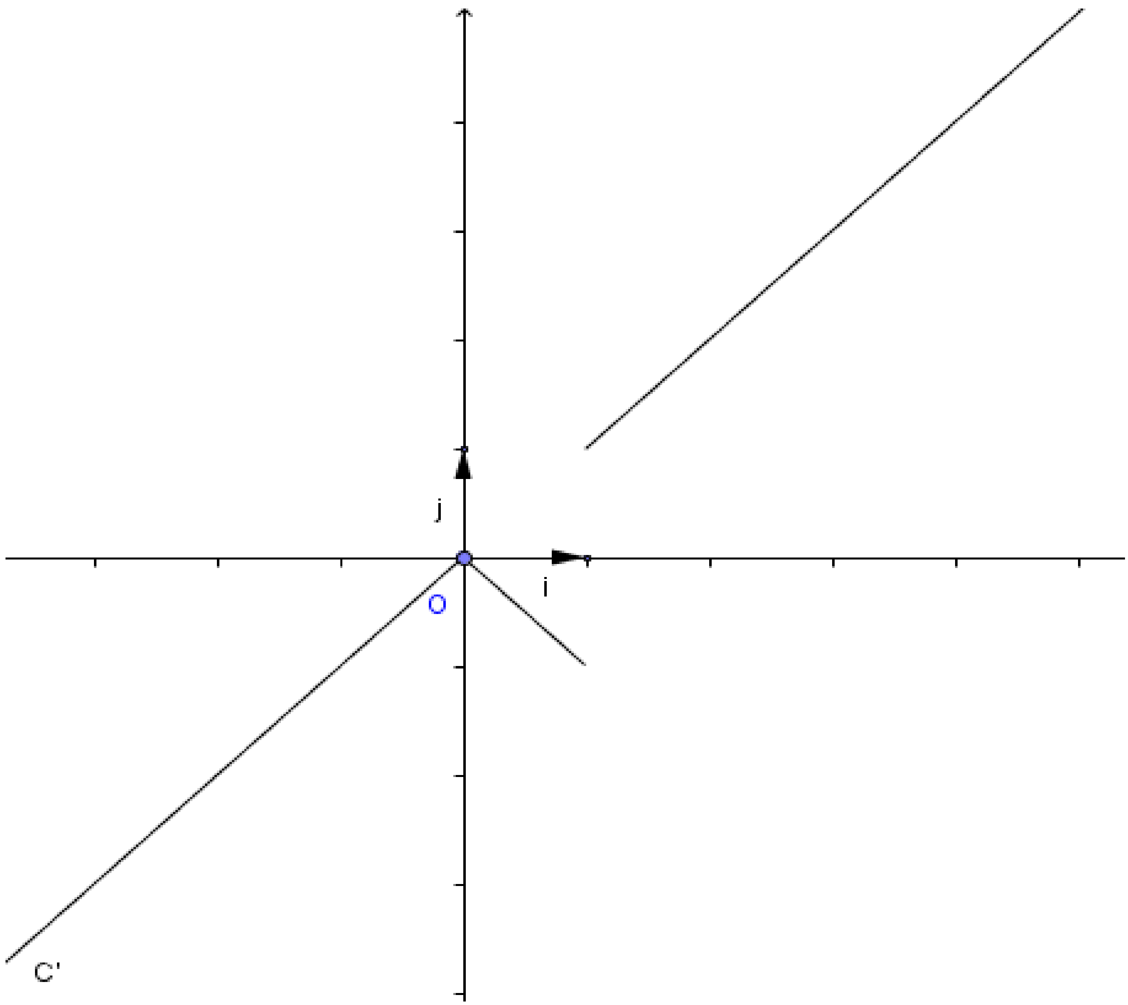
b) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2 - 1}{|x - 1|} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{(x-1)(x+1)}{1-x} = \lim\limits_{x \to 1^-} -(x+1) = -2$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2 - 1}{|x - 1|} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} (x+1) = 2$

2. a) La courbe (C') de g présente un saut en 1 donc la fonction n'admet pas de limite en 1.

Voir figure page 4.

b) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} x = 1$ $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x(1-x)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^-} -x = -1$



3

a) $E_f = \mathbb{R}^*$ et on a : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ donc la droite des ordnnées est asymptote verticale à C_f .

De plus $f(x) = x - \dfrac{1}{x^2} \Leftrightarrow f(x) - x = \dfrac{1}{x^2}$

Comme $\lim\limits_{|x|\to+\infty} -\dfrac{1}{x^2} = 0$ donc la droite d'équation y = x est asymptote oblique à C_f.

b) $E_f =]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[$ et on a

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \ \ et \ \ \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = 1$$

$$puis \lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1} - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)}{\sqrt{x^2-1}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x} = 0$$

d'où la droite d'équation y = x est asymptote oblique à C_f.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \ \ et \ \ \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = -1$$

$$puis \lim_{x\to-\infty} f(x) + x = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-1} + x = \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)}{\sqrt{x^2-1}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}-x} = 0$$

donc la droite d'équation y= -x est asymptote oblique à C_f.

4 1. $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{x}{x^2-x} = \lim_{x\to0^+} \frac{1}{x-1} = -1$ et $\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{x}{x^2+x} = \lim_{x\to0^-} \frac{1}{x+1} = 1$

donc f ne peut être prolongée par continuité en 0

2. $$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} \frac{x^3-2x^2-x+2}{1-x} = \lim_{x\to1} \frac{(x-1)(x^2-x-2)}{1-x} = \lim_{x\to1} 2+x-x^2 = 2$$

$$\lim_{x\to-1} f(x) = \lim_{x\to-1} \frac{x^3-2x^2-x+2}{1+x} = \lim_{x\to-1} \frac{(x+1)(x^2-3x+2)}{1+x} = \lim_{x\to-1} x^2-3x+2 = 6$$

donc on peut prolonger f par continuité en 1 et en –1 et on a :

$$\begin{cases} g(x) = f(x) & , \text{ si } x \in \mathbb{R}-\{-1;1\} \\ g(1) = 2 & \\ g(-1) = 6 & \end{cases}$$