Exercice 1

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à termes dans $\mathbb{R}_+^*$ et convergeant vers 0.

Que dire de la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{a_n + b_n}{a_n^2 + b_n^2}$?

Exercice 2

1. Soit (u_n) et (v_n) deux suites dans $[0,1]$ telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n.v_n = 1$.

   Etudier la convergence de chacune de ces suites.

2. Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n^2 + u_n v_n + v_n^2) = 0$.

   Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

3. Montrer que si les suites $(u_n + v_n)$ et $(u_n v_n)$ convergent vers 0, alors les suites (u_n) et (v_n) convergent aussi vers 0.

4. On suppose ici que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \le u_n \le 3$ et $0 \le v_n \le 2$.

   Si $(u_n v_n)$ tend vers 6, que peut-on dire de (u_n) et de (v_n) ?

Exercice 3

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2a_n \le a_{n+1} + a_{n-1}$.

On pose $b_n = a_{n+1} - a_n$.

1. Démontrer que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$.
2. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice 4

Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Montrer que la suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+1} + \dots + \dfrac{1}{kn}$ est convergente.

Exercice 5

Etudier la limite de chacune des suites suivantes (u_n), (v_n) et (w_n) :

1. $u_n = \dfrac{1! + 2! + \dots + n!}{(n+1)!}$
2. $v_n = \dfrac{1! + 2! + \dots + n!}{n!}$
3. $w_n = \dfrac{1! + 2! + \dots + n!}{(n-1)!}$
4. $x_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k!}{(n+1)!}$.

Exercice 6

Soit $u_n = n - \sqrt{(n+a)(n+b)}$. Etudier la convergence de (u_n).

Exercice 7

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n+k)(n+k+1)}}$.

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite convergente et que : $\frac{1}{2} \leq \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq 1$.

Exercice 8

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \cos n$ et $v_n = \sin n$.

Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ sont divergentes.

Exercice 1

On a : $$u_n = \frac{a_n + b_n}{a_n^2 + b_n^2} > \frac{a_n + b_n}{a_n^2 + 2a_nb_n + b_n^2} = \frac{a_n + b_n}{(a_n + b_n)^2} = \frac{1}{a_n + b_n}.$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 2

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leq u_n.v_n \leq u_n, v_n \leq 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$.

2. Il suffit d'écrire $$u_n^2 + u_nv_n + v_n^2 = (u_n + \frac{v_n}{2})^2 + \frac{3}{4}v_n^2.$$

   Cela montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

3. De même, il suffit d'écrire $$u_n^2 + v_n^2 = (u_n + v_n)^2 - 2u_nv_n.$$

   Donc $(u_n^2 + v_n^2)$ tend vers 0, puis de même pour (u_n) et (v_n).

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $$0 \leq u_n \leq 3 \Rightarrow 0 \leq \frac{u_n}{3} \leq 1$$

   et $$0 \leq v_n \leq 2 \Rightarrow 0 \leq \frac{v_n}{2} \leq 1.$$

   Il vient donc $$\frac{u_nv_n}{3} \leq v_n \leq 2 \text{ et } \frac{u_nv_n}{2} \leq u_n \leq 3.$$

   Par passage à la limite, on trouve $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

Exercice 3

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$2\, a_n \leq a_{n+1} + a_{n-1} \Rightarrow 2\, a_n - a_{n-1} \leq a_{n+1} \Rightarrow a_n - a_{n-1} \leq a_{n+1} - a_n \Rightarrow b_{n-1} \leq b_n.$$

Cela implique que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Donc pour montrer qu'elle est convergente, il suffit de vérifier qu'elle est majorée. Comme la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, il existe m et M tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ m \leq a_n \leq M \Rightarrow -M \leq -a_n \leq -m.$$

Il vient alors $b_n = a_{n+1} - a_n \leq M - m$, donc $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Supposons par l'absurde que $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n > 0$. Dans ce cas, $\ell > \frac{\ell}{2}$. Il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N$

$$\begin{array}{lcl} a_{n+1} - a_n & > & \frac{\ell}{2} \\ a_n - a_{n-1} & > & \frac{\ell}{2} \\ a_{n-1} - a_{n-2} & > & \frac{\ell}{2} \\ & \dots & \\ a_{N+1} - a_N & > & \frac{\ell}{2} \end{array}$$

En faisant la somme, on trouve :

$$a_{n+1} - a_N > (n + N + 1)\frac{\ell}{2} \Rightarrow a_{n+1} > a_N + (n + N + 1)\frac{\ell}{2}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_N + (n + N + 1)\frac{\ell}{2}) = +\infty$, il y a contradiction avec le fait que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
On arrive aussi à une contradiction si on suppose $\ell < 0$, donc finalement on ne peut qu'avoir $\ell = 0$.

2. Pour tout n, on a : $a_{n+1} - a_n \leq 0 \Rightarrow a_{n+1} \leq a_n$.

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et comme elle est bornée, elle converge.

Exercice 4

Onécrit : $$u_{n+1}-u_n=\sum_{m=kn+1}^{kn+k}\frac{1}{m}-\frac{1}{n+1}.$$

et dans cette somme, chacun des k termes est supérieur ou égal au dernier $\frac{1}{kn+\mathrm{k}}$.

Donc $\displaystyle\sum_{m=kn+1}^{kn+k}\frac{1}{m} \geq \frac{\mathrm{k}}{kn+\mathrm{k}} = \frac{1}{n+1}$.

ce qui montre la croissance de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

De plus, dans l'expression $u_n=\displaystyle\sum_{m=n+1}^{kn}\frac{1}{m}$,on majore chaque terme pas le premier $\frac{1}{n+1}$.

On a alors $$u_n\leq\frac{(k-1)n}{n+1}\leq k-1,$$

ce qui montre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, donc converge.

Exercice 5

1. Comme $u_n=\dfrac{1!+2!+...+(n-1)!}{(n+1)!}+\dfrac{1}{n+1}$, on a
$$u_n\leq\frac{(n-1)(n-1)!}{(n+1)!}+\frac{1}{n+1}\Rightarrow 0\leq u_n\leq\frac{n-1}{n(n+1)}+\frac{1}{n+1},$$
donc (u_n) converge vers 0.

2. Ecrivons $$v_n=\frac{1!+2!+...+(n-1)!}{n!}+1=u_{n-1}+1.$$

On en déduit que (v_n) converge vers 1 car (u_n) converge vers 1.

3. Ecrivons $$w_n=\frac{1!+2!+...+n!}{(n-1)!}=v_{n-1}+n,$$

donc (w_n) diverge vers $+\infty$.

3. Ecrivons $$w_n = \frac{1! + 2! + ... + n!}{(n-1)!} = v_{n-1} + n,$$

donc (w_n) diverge vers $+\infty$.

4. Il suffit d'écrire

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k!}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1! + 2! + ... + n!}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!} + u_n$$

donc (x_n) converge vers 0 .

Exercice 6

Par quantité conjugué, on a :
$$\begin{aligned} u_n &= \frac{n^2 - (n+a)(n+b)}{n + \sqrt{(n+a)(n+b)}} = \frac{n^2 - n^2 - nb - an - ab}{n + \sqrt{(n+a)(n+b)}} \\ &= -\frac{n(b+a) + ab}{n + \sqrt{(n+a)(n+b)}} = -\frac{n}{n}\frac{(b+a) + \frac{ab}{n}}{(1 + \sqrt{(1+\frac{a}{n})(1+\frac{b}{n})})} \\ &= \frac{-(a+b) - \frac{ab}{n}}{1 + \sqrt{(1+\frac{a}{n})(1+\frac{b}{n})}}, \end{aligned}$$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\dfrac{a+b}{2}.$

Exercice 7

$$u_{n+1}-u_n = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{(n+k+1)(n+k+2)}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{(n+k)(n+k+1)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n+3}} +\ldots+ \frac{1}{\sqrt{2n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n+2}} + \frac{1}{\sqrt{2n+2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n+3}}$$

$$-\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n+2}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n+3}} +\ldots+ \frac{1}{\sqrt{2n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2n+1)(2n+2)}}+\frac{1}{\sqrt{(2n+2)(2n+3)}}-\frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}}\left(\frac{1}{\sqrt{4n+2}}+\frac{1}{\sqrt{4n+6}}-\frac{1}{\sqrt{n+2}}\right).$$

Or $\dfrac{1}{\sqrt{4n+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{4n+6}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+2}} \geq \dfrac{1}{\sqrt{4n+8}}+\dfrac{1}{\sqrt{4n+8}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+2}} = \dfrac{2}{2\sqrt{n+2}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+2}}=0,$

donc $u_{n+1}-u_n \geq 0$. Donc (u_n) est croissante.

Par ailleur, on a :

$$(n+k)(n+k+1) > (n+k)^2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{(n+k)(n+k+1)}} < \frac{1}{n+k} \Rightarrow u_n < \frac{n}{n+k} < 1.$$

Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, elle converge. Posons $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

On a : $u_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2+1}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2+2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2+2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2+3}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Il est clair que $u_2 > \dfrac{1}{2}$, et pour tout $n\geq 2$, $u_n \geq \frac{1}{2}$ et il vient : $\dfrac{1}{2} \leq \ell \leq 1.$

Exercice 8

Pour tout n, on a : $u_n^2 + v_n^2 = 1$.

Supposons que (u_n) converge et posons $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Comme $\cos(n+1) = \cos n \cos 1 - \sin n \sin 1$,

on a $$\begin{cases} u_{n+1} = u_n \cos 1 - v_n \sin 1 \\ v_{n+1} = u_n \sin 1 + v_n \cos 1. \end{cases}$$

On en déduit que $v_n = \dfrac{1}{\sin 1}(u_n \cos 1 - u_{n+1}) \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{1}{\sin 1}(\ell \cos 1 - \sin 1)$.

Donc (v_n) converge aussi. Soit $\ell' = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Donc (v_n) converge aussi. De la relation $u_n^2 + v_n^2 = 1$, on en déduit que ℓ et ℓ'

ne peuvent pas être nulles en même temps.

Or $u_{n+1} + u_{n-1} = 2u_n \cos 1 \Rightarrow 2\ell = 2\ell \cos 1 \Rightarrow 1 = \cos 1$.

C'est absurde, donc (u_n) n'est pas convergente.

De même si (v_n) converge, alors $v_{n+1} + v_{n-1} = 2u_n \sin 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{\ell'}{\sin 1}$.

Ceci n'est pas possible puisque (u_n) est divergente.