Suites réelles

Exercice 1 : Soit (U_n) une suite arithmétique à termes strictement positifs.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{\sqrt{U_0}+\sqrt{U_1}}+\dfrac{1}{\sqrt{U_1}+\sqrt{U_2}}+\dots\dots+\dfrac{1}{\sqrt{U_{n-1}}+\sqrt{U_n}}=\dfrac{n}{\sqrt{U_0}+\sqrt{U_n}}$.

Exercice 2 :

Conjecturer une expression de U_n en fonction de n, puis démontrer la propriété ainsi conjecturée.

1. $U_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{1+U_n}$.
2. $U_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = U_n + 2n + 3$.
3. $U_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{\sqrt{1+U_n^{\,2}}}$.
4. $U_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{\sqrt{2+U_n^{\,2}}}$.
5. $U_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \sqrt{1+\dfrac{U_n^2}{2}}$.

Exercice 3 :

On donne le tableau de variation d'une fonction f.

X	1		5
f'(x)		+	
f	2	$\nearrow$	4

1. Soit la suite définie par : $U_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = f(U_n)$.
   a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \le U_n \le 5$.
   b. Montrer que (U_n) est croissante.
2. Soit la suite définie par : $V_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = f(V_n)$.
   a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,$1 \le V_n \le 5$.
   b. Montrer que (V_n) est décroissante.

Exercice 4 :

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{1+U_n^{\,2}}$.

1.a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \succ 0$.
b. Montrer que (U_n) est monotone. En déduire que (U_n) est convergente et préciser sa limite.

2.a. Pour tout entier p, exprimer $\dfrac{1}{U_{p+1}^{\,2}}-\dfrac{1}{U_p^{\,2}}$ en foction de $U_p^{\,2}$.

b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1}\left(\frac{1}{U_{p+1}^{\,2}}-\frac{1}{U_p^{\,2}}\right) = 2n+\sum_{p=0}^{n-1}U_p^{\,2}$ puis que $\dfrac{1}{U_n^{\,2}} = 1+2n+\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1}U_p^{\,2}$.

c. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n \le \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$ et retrouver $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice 5 :

Soit f la fonction définie sur $[2,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x^2}{2x-2}$.

1. Etudier le sens de variation de f sur $[2,+\infty[$.
2. On considère la suite définie par : $U_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = f(U_n)$.
   a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq 2$.
   b. Montrer que (U_n) est monotone. En déduire que (U_n) est convergente et préciser sa limite.

3.a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - 2 \leq \dfrac{1}{2}(U_n - 2)$.

b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n - 2 \leq (\dfrac{1}{2})^{n-1}$. Retrouver $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \dfrac{2}{1-(\frac{1}{2})^{2^n}}$.

Exercice 6 :

On considère les suites (U_n) et (V_n) définies sur $\mathbb{N}$ par les relations :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}.$$

1. Calculer u_1, v_1, u_2, v_2.
2. Soit la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = v_n - u_n$.

a. Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique.

b. Exprimer w_n en fonction de n et préciser la limite de la suite (w_n).

3. Montrer que les deux suites (U_n) et (V_n), sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?
4. On considère à présent la suite (t_n) définie, pour tout entier naturel n, par $t_n = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$.

a. Démontrer que la suite (t_n) est constante.

b. En déduire la limite des suites (U_n) et (V_n).

Exercice 7 :

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} = 2 + \dfrac{n^2}{U_n}$.

1.a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}$, $n \prec U_n \prec n+1$.

b. Montrer que (U_n) est croissante.

2. Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $V_n = \dfrac{1}{U_n - n} - 1$.

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_{n+1} = \dfrac{1}{V_n + \frac{1}{n}}$.

b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 - \dfrac{1}{n} \leq V_n \leq 1$.

c. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (U_n - n)$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{p=1}^{n} pV_p$.

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n - \dfrac{n+1}{2n} = \dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{p=1}^{n} p(V_p - 1)$.

b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2n} \leq S_n \leq \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2n}$

c. Montrer que (S_n) est convergente et préciser sa limite.