Limites-Continuité

Exercice 1 :

Etudier les limites suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty} x^2(1-\cos\frac{2}{x}) \;;\; \lim_{x\to+\infty}(x-1)\sin(\frac{\pi}{x-1}) \;;\; \lim_{x\to1}(x-1)\sin(\frac{\pi}{x-1}) \;;\; \lim_{x\to0^-}\frac{x^3\sin(\frac{1}{x^2})}{1+x^2} \;;\; \lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sin^2x}{3+\cos x}$$

$$\lim_{x\to0}\cot g(x).\sin(\tan x) \;;\; \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\tan^2x).(\cos(\cos x)-1) \;;\; \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{3+9x^2}-3x)\sin(\pi x)$$

Exercice 2 :

1. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$ $-2 \prec \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-1 \prec 0$

2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \tan[\frac{\pi}{4}(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-1)]$

   a. Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}$.
   b. Etudier $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

Exercice 3 :

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=4x^3-3x-8$
a. Dresser le tableau de variation de g sur $\mathbb{R}$
b. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution α et que $\alpha\in\left]1,2\right[$.
   Déterminer un encadrement de α d'amplitude 0,25.
c. Déterminer le signe de g sur $\mathbb{R}$
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\}$ par : $f(x)=\frac{x^3+1}{4x^2-1}$.
   On désigne par Γ la représentation graphique de f dans un repère orthonormé $(0,\vec{i},\vec{j})$.
a. Montrer que $f(\alpha)=\frac{3}{8}\alpha$
b. Etudier les variations de la fonction f.
c. Etudier les branches infinies de Γ.
d. Tracer Γ.

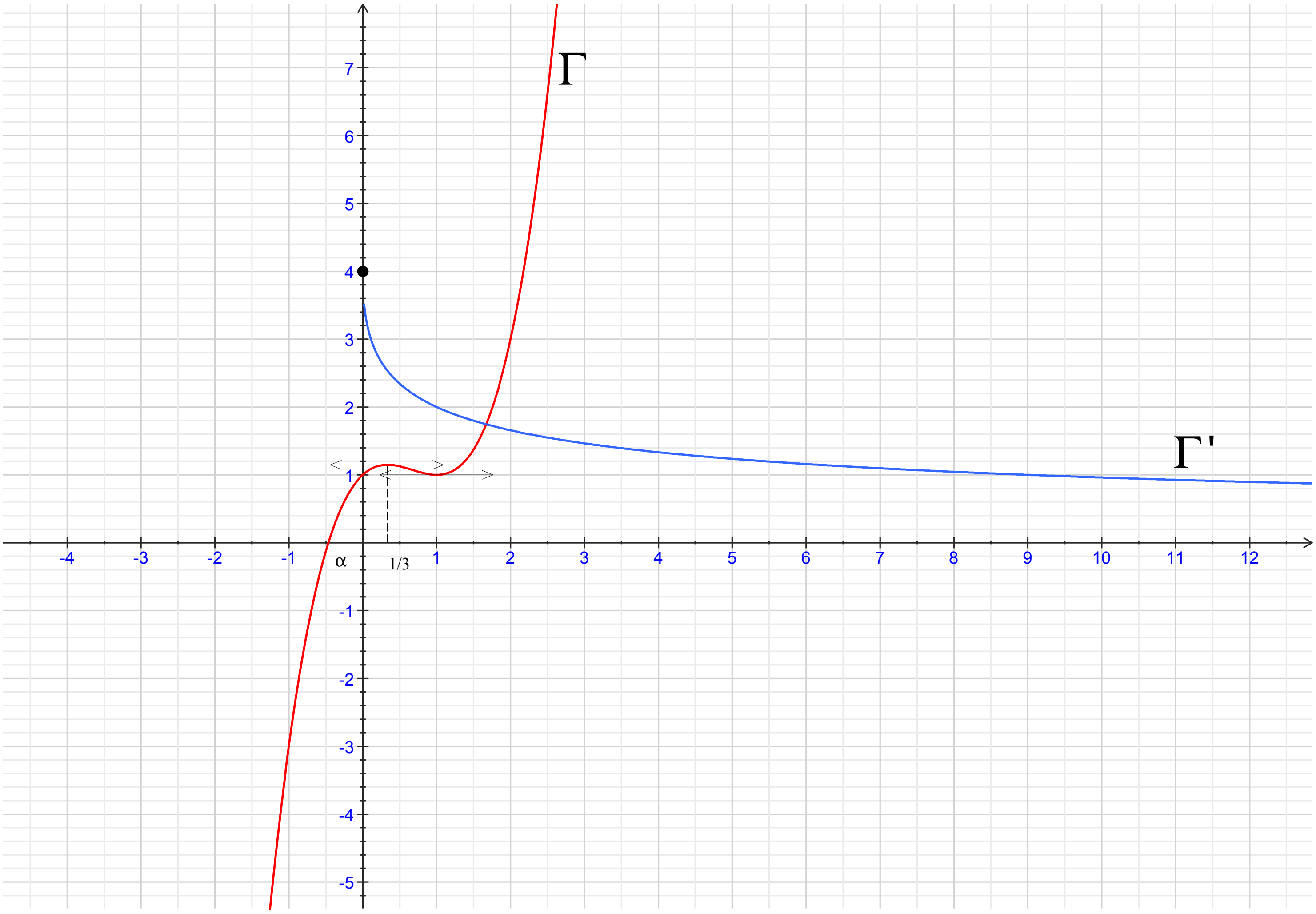
Exercice 4 :

Dans la figure ci-dessous Γ et Γ' sont les courbes représentatives de deux fonctions f et g définies respectivement sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+$.On sait que la droite y = 0 est une asymptote à Γ' et que Γ admet une branche parabolique de direction celle de (yy') au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

1. a. Par une lecture graphique déterminer

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \;,\; \lim_{x\to-\infty} f(x) \;,\; \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \;,\; \lim_{x\to+\infty} g(x)$$

   b. Déterminer les réels x vérifiant : $(f(x))^2-5f(x)+6=0$.
      Déterminer les réels x vérifiant : E(f(x)) = 1.
   c. Dresser le tableau de variation de f.
2. Soit la fonction $h: x\to gof(x)$.
   a. Préciser l'ensemble de définition de h.
   b. Déterminer $h(\alpha), h(0), h(1)$ et $\lim_{x\to+\infty} h(x)$
3. a. Tracer dans le même repère la courbe de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $x\to|f(x)|$
   b. Tracer dans le même repère la courbe de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $x\to g(|x|)$



Exercice 5 :

La courbe représentative d'une fonction f, définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ a été tracer ci-dessous.

1) Peut-on conjecturer les limites suivantes :

a- de f en $-\infty, +\infty$, en $-1^+, -1^-, 1^+$ et 1^-.

b- de $x \longrightarrow f(x)-x$, $x \longrightarrow \dfrac{f(x)}{x}$ en $+\infty$.

2)a- Dresser le tableau de variation de f.

b- Déterminer suivant les valeurs de m, le nombres de solutions de l'équation f(x)=m.